Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка: $\left(2y^2x\ln x-y\right)dx=xdy$. Выполнить проверку.

Решение

$$xy'=2y^2x\ln x-y;\ y'+\frac{y}{x}=2y^2\ln x.$$

Это уравнение Бернулли. Замена: $y=uv$, $y'=u'v+uv'$:

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=2u^2v^2\ln x,\ u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=2u^2v^2\ln x.$$

$$v'+\frac{v}{x}=0,\ \frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x},\ \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x},\ \ln|v|=-\ln|x|,\ v=\frac{1}{x}.$$

$$u'\cdot\frac{1}{x}=2\cdot u^2\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\ln x,\ \frac{du}{dx}=2\cdot u^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\ln x;\ \frac{du}{u^2}=\frac{2\ln x}{x}dx.$$

$$\int u^{-2}du=2\int\ln x\,d(\ln x),\ \frac{u^{-1}}{-1}=\ln^2x-C,\ \frac{1}{u}=C-\ln^2x;\ u=\frac{1}{C-\ln^2x}.$$

$$y=uv=\frac{1}{x\left(C-\ln^2x\right)}.$$

Проверка

Для проверки запишем уравнение в виде $xy'-2y^2x\ln x+y=0$.

$$y'=-\frac{1}{x^2\left(C-\ln^2x\right)^2}\cdot\left(C-\ln^2x+x\cdot\left(-2\ln x\cdot\frac{1}{x}\right)\right)=-\frac{C-\ln^2x-2\ln x}{x^2\left(C-\ln^2x\right)^2}=\frac{\ln^2x+2\ln x-C}{x^2\left(C-\ln^2x\right)^2}$$

$$xy'-2y^2x\ln x+y=x\cdot\frac{\ln^2x+2\ln x-C}{x^2\left(C-\ln^2x\right)^2}-2\cdot\frac{1}{x^2\left(C-\ln^2x\right)^2}\cdot x\ln x+\frac{1}{x\left(C-\ln^2x\right)}=$$
$$=\frac{\ln^2x+2\ln x-C}{x\left(C-\ln^2x\right)^2}-\frac{2\ln x}{x\left(C-\ln^2x\right)^2}+\frac{1}{x\left(C-\ln^2x\right)}=\frac{\ln^2x-C}{x\left(C-\ln^2x\right)^2}+\frac{C-\ln^2x}{x\left(C-\ln^2x\right)^2}=0.$$

Проверка пройдена успешно.

Ответ: $y=\frac{1}{x\left(C-\ln^2x\right)}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.