Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти решение задачи Коши: $2(y'+xy)=(1+x)e^{-x}y^2$, $y(0)=2$.

Решение

Разделим на 2 обе части равенства:

$$y'+xy=\frac{(x+1)e^{-x}}{2}\cdot y^2$$

Это уравнение Бернулли. Замена $y=uv$, $y'=u'v+uv'$:

$$u'v+uv'+xuv=\frac{(x+1)e^{-x}}{2}\cdot u^2v^2;\ u'v+u(v'+xv)=\frac{(x+1)e^{-x}}{2}\cdot u^2v^2.$$

$$v'+xv=0;\ \frac{dv}{dx}=-xv;\ \frac{dv}{v}=-xdx;\ \ln|v|=-\frac{x^2}{2};\ v=e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$$u'e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{(x+1)e^{-x}}{2}\cdot u^2\cdot e^{-x^2};\ \frac{du}{dx}=\frac{x+1}{2}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}-x}\cdot u^2;\ \frac{du}{u^2}=\frac{x+1}{2}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}-x};$$

$$\int\frac{du}{u^2}=\int\frac{x+1}{2}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}-x}dx;\ \int u^{-2}du=-\frac{1}{2}\int e^{-\frac{x^2}{2}-x}d\left(-\frac{x^2}{2}-x\right);$$

$$-\frac{1}{u}=-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}-x}-\frac{1}{2}C;\ u=\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}-x}+\frac{1}{2}C}=\frac{2}{e^{-\frac{x^2}{2}-x}+C}.$$

Общее решение уравнения будет таким: $y=uv=\dfrac{2\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}{e^{-\frac{x^2}{2}-x}+C}$.

Так как $y(0)=2$, то $2=\dfrac{2}{1+C}$, откуда $C=0$. Следовательно, частное решение уравнения будет таким: $y=\dfrac{2\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}{e^{-\frac{x^2}{2}-x}}=2e^x$.

Ответ: $y=2e^x$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.