Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти решение задачи Коши: $y'+y=(1+x)y^2$, $y(0)=1$.

Решение

Это уравнение Бернулли. Замена $y=uv$, $y'=u'v+uv'$.

$$u'v+uv'+uv=(1+x)u^2v^2;\ u'v+u(v'+v)=(1+x)u^2v^2.$$

$v'+v=0;\ \dfrac{dv}{dx}=-v;\ \dfrac{dv}{v}=-dx;\ \ln|v|=-x;\ v=e^{-x}.$

$u'e^{-x}=(1+x)u^2e^{-2x};\ \dfrac{du}{dx}=(1+x)u^2e^{-x};\ \dfrac{du}{u^2}=(1+x)e^{-x}dx.$

$$\int(1+x)e^{-x}dx=\begin{bmatrix}u=1+x;\ du=dx.\\ dv=e^{-x}dx;\ v=-e^{-x}.\end{bmatrix}=-(1+x)e^{-x}+\int e^{-x}dx=-(1+x)e^{-x}-e^{-x}+C=e^{-x}\cdot(-x-2)+C$$

$\int\dfrac{du}{u^2}=\int(1+x)e^{-x}dx;\ \int u^{-2}du=\int(1+x)e^{-x}dx.$

$-\dfrac{1}{u}=e^{-x}\cdot(-x-2)-C;\ u=\dfrac{1}{e^{-x}\cdot(x+2)+C}.$

$$y=uv=\frac{e^{-x}}{e^{-x}\cdot(x+2)+C}=\frac{e^{-x}\cdot e^{x}}{e^{-x}\cdot e^{x}\cdot(x+2)+C\cdot e^{x}}=\frac{1}{x+2+C\cdot e^{x}}.$$

Так как $y(0)=1$, то $1=\dfrac{1}{2+C}$, $C=-1$. Следовательно, $y=\dfrac{1}{x+2-e^{x}}$.

Ответ: $y=\dfrac{1}{x+2-e^{x}}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.