Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = y\operatorname{ctg} x + \dfrac{y^3}{\sin x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$.

Решение

$$y' = y\operatorname{ctg} x + \frac{y^3}{\sin x},\ y' - y\operatorname{ctg} x = \frac{y^3}{\sin x}.$$

Это уравнение Бернулли. Замена: $y = uv$, $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' - uv\operatorname{ctg} x = \frac{u^3v^3}{\sin x},\ u'v + u\left(v' - v\operatorname{ctg} x\right) = \frac{u^3v^3}{\sin x}.$$

$v' - v\ \operatorname{ctg} x = 0$, $\dfrac{dv}{dx} = v\operatorname{ctg} x$, $\dfrac{dv}{v} = \operatorname{ctg} x\,dx$, $\ln|v| = \ln|\sin x|$, $v = \sin x$.

$u' \cdot \sin x = \dfrac{u^3 \sin^3 x}{\sin x}$, $u' = u^3 \sin x$, $\dfrac{du}{dx} = u^3 \sin x$, $u^{-3}du = \sin x dx$, $\int u^{-3}du = \int \sin x dx$,

$\dfrac{u^{-2}}{-2} = -\cos x - \dfrac{C}{2}$, $\dfrac{1}{u^2} = 2\cos x + C$, $u = \dfrac{1}{\pm\sqrt{2\cos x + C}}$, $y = uv = \dfrac{\sin x}{\pm\sqrt{2\cos x + C}}$.

Так как $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$, то из двух функций $y = -\dfrac{\sin x}{\sqrt{2\cos x + C}}$ и $y = \dfrac{\sin x}{\sqrt{2\cos x + C}}$ выбираем функцию $y = \dfrac{\sin x}{\sqrt{2\cos x + C}}$.

$$2 = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2\cos\frac{\pi}{2} + C}},\ 2 = \frac{1}{\sqrt{C}},\ C = \frac{1}{4},\ y = \frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x + \frac{1}{4}}} = \frac{2\sin x}{\sqrt{8\cos x + 1}}.$$

Ответ: $y = \dfrac{2\sin x}{\sqrt{8\cos x + 1}}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.