Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найдите общее решение дифференциального уравнения первого порядка: $y' - \frac{2x \cdot y}{1+x^2} = 4 \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}}$.

Решение

Замена: $y = uv$, $y' = u'v + uv'$:

$$u'v + uv' - \frac{2x \cdot uv}{1+x^2} = 4 \cdot \frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{1+x^2}},\ u'v + u \cdot \left(v' - \frac{2x \cdot v}{1+x^2} \right) = 4 \cdot \frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$v' - \frac{2x \cdot v}{1+x^2} = 0,\ \frac{dv}{dx} = \frac{2xv}{1+x^2},\ \frac{dv}{v} = \frac{2xdx}{1+x^2},\ \frac{dv}{v} = \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2},\ \ln|v| = \ln\left|1+x^2\right|,\ v = 1+x^2.$$

$$u' \cdot \left(1+x^2\right) = 4 \cdot \frac{\sqrt{u} \cdot \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}},\ u' \cdot \left(1+x^2\right) = 4\sqrt{u},\ \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{2dx}{1+x^2}.$$

$$\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \int \frac{2dx}{1+x^2},\ \sqrt{u} = 2\operatorname{arctg} x + C,\ u = \left(2\operatorname{arctg} x + C\right)^2.$$

$$y = uv = \left(2\operatorname{arctg} x + C\right)^2 \cdot \left(1+x^2\right).$$

Ответ: $y = \left(2\operatorname{arctg} x + C\right)^2 \cdot \left(1+x^2\right).$

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.