Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Решить дифференциальное уравнение $xy^3dx=\left(x^2y+2\right)dy$.

Решение

Проверим, являются ли функции $y=C$, где $C\in R$, решением данного уравнения. Подставляя $y=C$, получим:

$$xC^3dx=\left(Cx^2+2\right)\cdot 0,\ C\cdot x^3dx=0.$$

Следовательно, функция вида $y=C$ будет решением при $C=0$, т.е. $y=0$ – решение заданного уравнения.

При условии $y\neq 0$ делим обе части уравнения на dy:

$$xy^3\frac{dx}{dy}=x^2y+2;\ \frac{dx}{dy}=\frac{x}{y^2}+\frac{2}{xy^3};\ x'_y-\frac{x}{y^2}=\frac{2}{xy^3}.$$

Получили уравнение Бернулли относительно функции $x(y)$. Замена: $x=uv,\ x'=u'v+uv'$:

$$u'v+uv'-\frac{uv}{y^2}=\frac{2}{uvy^3},\ u'v+u\cdot\left(v'-\frac{v}{y^2}\right)=\frac{2}{uvy^3}.$$

$$v'-\frac{v}{y^2}=0,\ \frac{dv}{dy}=\frac{v}{y^2},\ \frac{dv}{v}=\frac{dy}{y^2},\ \ln|v|=-\frac{1}{y},\ v=e^{-\frac{1}{y}}.$$

$$u'e^{-\frac{1}{y}}=\frac{2}{ue^{-\frac{1}{y}}y^3};\ \frac{du}{dy}=\frac{2e^{\frac{2}{y}}}{uy^3};\ udu=\frac{2e^{\frac{2}{y}}dy}{y^3}.$$

$$\int\frac{2e^{\frac{2}{y}}dy}{y^3}=-\frac{1}{2}\int\frac{2}{y}e^{\frac{2}{y}}d\left(\frac{2}{y}\right)=\left[t=\frac{2}{y}\right]=-\frac{1}{2}\int te^tdt=\begin{bmatrix}u=t;\ du=dt.\\ dv=e^tdt;v=e^t.\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\cdot\left(te^t-\int e^tdt\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left(te^t-e^t\right)+C=-\frac{e^{\frac{2}{y}}}{2}\cdot\left(\frac{2}{y}-1\right)+C=e^{\frac{2}{y}}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{y}\right)+C$$

Интегрируя равенство $udu=\frac{2e^{\frac{2}{y}}dy}{y^3}$, получим:

$$\int udu=\int\frac{2e^{\frac{2}{y}}dy}{y^3};\ \frac{u^2}{2}=e^{\frac{2}{y}}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{y}\right)+C,\ u^2=e^{\frac{2}{y}}\cdot\left(1-\frac{2}{y}\right)+2C.$$

Переобозначая $2C$ как C, будем иметь: $u^2 = e^{\frac{2}{y}} \cdot \left(1 - \frac{2}{y}\right) + C$. Так как $x^2 = u^2 v^2$, то получим:

$$x^2 = \left(e^{\frac{2}{y}} \cdot \left(1 - \frac{2}{y}\right) + C\right) \cdot e^{-\frac{2}{y}} = 1 - \frac{2}{y} + C \cdot e^{-\frac{2}{y}}$$

Следовательно, $x = -\sqrt{1 - \frac{2}{y} + C \cdot e^{-\frac{2}{y}}}$ или $x = \sqrt{1 - \frac{2}{y} + C \cdot e^{-\frac{2}{y}}}$.

Ответ: $y = 0$, $x = -\sqrt{1 - \frac{2}{y} + C \cdot e^{-\frac{2}{y}}}$, $x = \sqrt{1 - \frac{2}{y} + C \cdot e^{-\frac{2}{y}}}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.