Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Решить задачу Коши: $y^3(y-1)dx+3xy^2(y-1)dy=(y+2)dy$, $y\big|_{x=1/4}=2$.

Решение

$$y^3(y-1)\frac{dx}{dy}+3xy^2(y-1)=y+2,\ \frac{dx}{dy}+\frac{3x}{y}=\frac{y+2}{y^3(y-1)}.$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $x(y)$. Замена $x=uv$, $x'=u'v+uv'$:

$$u'v+uv'+\frac{3uv}{y}=\frac{y+2}{y^3(y-1)};\ u'v+u\left(v'+\frac{3v}{y}\right)=\frac{y+2}{y^3(y-1)}.$$

$$\frac{dv}{dy}=-\frac{3v}{y};\ \frac{dv}{v}=-\frac{3dy}{y};\ \ln|v|=-3\ln|y|;\ v=\frac{1}{y^3}.$$

$$u'\cdot\frac{1}{y^3}=\frac{y+2}{y^3(y-1)};\ u'=\frac{y+2}{y-1}=\frac{y-1+3}{y-1}=1+\frac{3}{y-1}.$$

$$u=\int\left(\frac{3}{y-1}+1\right)dy=3\ln|y-1|+y+C;\ x=uv=\frac{3\ln|y-1|+y+C}{y^3}.$$

Так как $x(2)=\frac{1}{4}$, то $\frac{1}{4}=\frac{2+C}{8}$, $C=0$, $x=\frac{3\ln|y-1|+y}{y^3}$.

Ответ: $x=\frac{3\ln|y-1|+y}{y^3}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.