Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения первого порядка: $x\sin(xy)dx+\left(\frac{2x}{y^2}\cos(xy)+\frac{x^2y^2-2}{y^3}\sin(xy)\right)dy=0$.

Решение

Обозначим $P=x\sin(xy);\ Q=\frac{2x}{y^2}\cos(xy)+\frac{x^2y^2-2}{y^3}\sin(xy)$.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=x\cdot(\sin xy)'_y=x^2\cos(xy)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\left(\frac{2x}{y^2}\cos(xy)+\left(\frac{x^2}{y}-\frac{2}{y^3}\right)\sin(xy)\right)'_x=$$
$$=\frac{2}{y^2}\cos(xy)-\frac{2x}{y^2}\cdot y\cdot\sin(xy)+\frac{2x}{y}\sin(xy)+\left(\frac{x^2}{y}-\frac{2}{y^3}\right)\cdot y\cos(xy)=x^2\cos(xy)$$

Так как $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, то имеем уравнение в полных дифференциалах, т.е. выражение $Pdx+Qdy$ является дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x\sin(xy);\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2x}{y^2}\cos(xy)+\frac{x^2y^2-2}{y^3}\sin(xy).$$

$$u=\int x\sin(xy)dx=\left[\begin{array}{l}u=x;\ du=dx.\\ dv=\sin(xy)dx;\ v=-\frac{1}{y}\cos(xy)\end{array}\right]=-\frac{x\cos(xy)}{y}+\frac{1}{y}\int\cos(xy)dx=-\frac{x\cos(xy)}{y}+\frac{\sin(xy)}{y^2}+f(y)$$

$$\left(-\frac{x\cos(xy)}{y}+\frac{\sin(xy)}{y^2}+f(y)\right)'_y=\frac{2x}{y^2}\cos(xy)+\left(\frac{x^2}{y}-\frac{2}{y^3}\right)\sin(xy)$$
$$-x\cdot\frac{-xy\sin(xy)-\cos(xy)}{y^2}+\frac{xy^2\cos(xy)-2y\sin(xy)}{y^4}+f'(y)=\frac{2x}{y^2}\cos(xy)+\frac{x^2}{y}\sin(xy)-\frac{2}{y^3}\sin(xy)$$
$$\frac{x^2\sin(xy)}{y}+\frac{2x\cos(xy)}{y^2}-\frac{2\sin(xy)}{y^3}+f'(y)=\frac{2x}{y^2}\cos(xy)+\frac{x^2}{y}\sin(xy)-\frac{2}{y^3}\sin(xy)$$
$$f'(y)=0;\ f(y)=C_1.$$

Следовательно, $u=-\frac{x\cos(xy)}{y}+\frac{\sin(xy)}{y^2}+C_1$. Принимая $C_1=0$, получим: $u=-\frac{x\cos(xy)}{y}+\frac{\sin(xy)}{y^2}$.
Общее решение исходного уравнения имеет вид $u(x,y)=C$, т.е. общий интеграл будет таким:

$$-\frac{x\cos(xy)}{y}+\frac{\sin(xy)}{y^2}=C$$

Ответ: $-\frac{x\cos(xy)}{y}+\frac{\sin(xy)}{y^2}=C$

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.