Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Указать тип дифференциального уравнения и найти его общее решение:

$$\left(5\cos(5x-1)-\frac{2}{(2x-3y)^2}\right)dx+\left(\frac{3}{(2x-3y)^2}+\frac{3}{9y^2+1}\right)dy=0$$

Решение

Это дифференциальное уравнение первого порядка.

$$P=5\cos(5x-1)-\frac{2}{(2x-3y)^2},\ Q=\frac{3}{(2x-3y)^2}+\frac{3}{9y^2+1}.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2\cdot\left((2x-3y)^{-2}\right)'_y=-2\cdot(-2)\cdot(2x-3y)^{-3}\cdot(-3)=-\frac{12}{(2x-3y)^3}.$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=3\cdot\left((2x-3y)^{-2}\right)'_x=3\cdot(-2)\cdot(2x-3y)^{-3}\cdot 2=-\frac{12}{(2x-3y)^3}.$$

Так как $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, то имеем уравнение в полных дифференциалах. Это значит, что выражение $Pdx+Qdy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=5\cos(5x-1)-\frac{2}{(2x-3y)^2},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{3}{(2x-3y)^2}+\frac{3}{9y^2+1}.$$

$$u=\int\left(5\cos(5x-1)-\frac{2}{(2x-3y)^2}\right)dx=\int\cos(5x-1)d(5x-1)-\int(2x-3y)^{-2}d(2x-3y)=$$
$$=\sin(5x-1)-\frac{(2x-3y)^{-1}}{-1}+f(y)=\sin(5x-1)+\frac{1}{2x-3y}+f(y).$$

$$\frac{3}{(2x-3y)^2}+f'(y)=\frac{3}{(2x-3y)^2}+\frac{3}{9y^2+1},\ f'(y)=\frac{3}{9y^2+1}.$$

$$f(y)=\int\frac{3dy}{9y^2+1}=\int\frac{d(3y)}{(3y)^2+1}=\operatorname{arctg}3y+C_1.$$

Принимая $C_1=0$, получим $f(y)=\operatorname{arctg}3y$, откуда следует $u=\sin(5x-1)+\frac{1}{2x-3y}+\operatorname{arctg}3y$. Общий интеграл заданного уравнения имеет вид $u(x,y)=C$, т.е.

$$\sin(5x-1)+\frac{1}{2x-3y}+\operatorname{arctg}3y=C.$$

Ответ: $\sin(5x-1)+\dfrac{1}{2x-3y}+\operatorname{arctg}3y=C$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре,
аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.