Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка:

$$(2y\ln y+y-x)y'=y,\ y(1)=1.$$

Решение

$$(2y\ln y+y-x)dy-ydx=0$$
$$-ydx+(2y\ln y+y-x)dy=0$$

$\frac{\partial P}{\partial y}=-1;\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-1.$

Так как $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, то имеем уравнение в полных дифференциалах. Это значит, что выражение $Pdx+Qdy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-y;\ \frac{\partial u}{\partial y}=2y\ln y+y-x;$$
$$u=\int(-y)dx=-xy+f(y);\ -x+f'(y)=2y\ln y+y-x;\ f'(y)=2y\ln y+y.$$

$$f(y)=\int(2y\ln y+y)dy=\frac{y^2}{2}+\int 2y\ln y\,dy=\left[\begin{array}{l}u=\ln y;\ du=\frac{1}{y}dy.\\ dv=2y\,dy;\ v=y^2.\end{array}\right]=\frac{y^2}{2}+y^2\ln y-\int ydy=$$

$$=\frac{y^2}{2}+y^2\ln y-\frac{y^2}{2}+C_1=y^2\ln y+C_1$$

Принимая $C_1=0$, получим $f(y)=y^2\ln y$, откуда следует $u=-xy+y^2\ln y$. Общий интеграл заданного уравнения имеет вид $u(x,y)=C$, т.е. $-xy+y^2\ln y=C$.

Так как $y(1)=1$, то $-1\cdot 1+1^2\cdot\ln 1=C$, откуда $C=-1$. Следовательно, $-xy+y^2\ln y=-1$, $xy-y^2\ln y=1$.

Ответ: $xy-y^2\ln y=1$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.