Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти общее и частное решения дифференциального уравнения: $y' = \frac{2y - x}{2x + y}$, $y\big|_{x=1} = 1$.

Решение

$$y' = \frac{2 \cdot \frac{y}{x} - 1}{2 + \frac{y}{x}}$$

Это однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Замена: $y = u(x) \cdot x$, $y' = u'x + u$.

$u'x + u = \frac{2u - 1}{2 + u}$; $u'x = \frac{2u - 1}{2 + u} - u$; $x\frac{du}{dx} = -\frac{u^2 + 1}{u + 2}$; $\frac{(u + 2)du}{u^2 + 1} = -\frac{dx}{x}$.

$$\int \frac{(u + 2)du}{u^2 + 1} = \int \frac{udu}{u^2 + 1} + \int \frac{2du}{u^2 + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(u^2 + 1)}{u^2 + 1} + 2\int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{1}{2}\ln(u^2 + 1) + 2\operatorname{arctg} u + C.$$

$$\int \frac{(u + 2)du}{u^2 + 1} = -\int \frac{dx}{x};\ \frac{1}{2}\ln(u^2 + 1) + 2\operatorname{arctg} u = -\ln|x| + \frac{1}{2}C;\ \ln(u^2 + 1) + 4\operatorname{arctg} u + 2\ln|x| = C.$$

$\ln(u^2 + 1) + 4\operatorname{arctg} u + \ln x^2 = C$; $\ln(u^2x^2 + x^2) + 4\operatorname{arctg} u = C$.

Так как $y = ux$, то общее решение будет таким: $\ln(y^2 + x^2) + 4\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C$.

Так как $y(1) = 1$, то: $\ln 2 + 4\operatorname{arctg} 1 = C$; $C = \pi + \ln 2$.

Частное решение будет таким: $\ln(y^2 + x^2) + 4\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \pi + \ln 2$.

Ответ:

- Общее решение: $\ln(y^2 + x^2) + 4\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C$.
- Частное решение: $\ln(y^2 + x^2) + 4\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \pi + \ln 2$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.