Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти общий интеграл дифференциального уравнения: $y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6$.

Решение

Это однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Замена: $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$u'x + u = u^2 + 6u + 6;$$
$$u'x = u^2 + 5u + 6;$$
$$x\frac{du}{dx} = (u+3)(u+2).$$

Проверим, являются ли функции $u = -2$ и $u = -3$ решениями полученного уравнения. Подставляя $u = -2$, получим: $x \cdot 0 = 1 \cdot 0$, $0 = 0$. Подставляя $u = -3$, получим: $x \cdot 0 = 0 \cdot (-1)$, $0 = 0$. Следовательно, функции $u = -2$ и $u = -3$ – решения полученного уравнения. При условии $u \neq -2$, $u \neq -3$ разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{du}{(u+3)(u+2)} = \frac{dx}{x}; \int\left(\frac{1}{u+2} - \frac{1}{u+3}\right)du = \int\frac{dx}{x}.$$
$$\ln|u+2| - \ln|u+3| = \ln|x| + \ln\overline{C};\ \overline{C} > 0.$$
$$\ln\left|\frac{u+2}{u+3}\right| = \ln(\overline{C} \cdot |x|);\ \left|\frac{u+2}{u+3}\right| = \overline{C} \cdot |x|;\ \left|\frac{u+2}{ux+3x}\right| = \overline{C};\ \frac{u+2}{ux+3x} = \pm\overline{C}.$$

Переобозначая $\pm\overline{C}$ как C, где $C \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$, получим: $\frac{u+2}{ux+3x} = C$. Решение $u = -2$, найденное ранее, можно получить из выражения $\frac{u+2}{ux+3x} = C$ при $C = 0$. Значит, условие $C \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ можно изменить, приняв $C \in R$.

Так как $y = ux$, то получим:

$$\frac{u+2}{ux+3x} = C \Rightarrow \frac{\frac{y}{x}+2}{y+3x} = C;\ \frac{y+2x}{x(y+3x)} = C.$$
$$u = -3 \Rightarrow \frac{y}{x} = -3;\ y = -3x.$$

Ответ: $\frac{y+2x}{x(y+3x)} = C$; $y = -3x$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.