Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти общий интеграл дифференциального уравнения $y' = \dfrac{x^2 + xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$. Проверить правильность решения обратной подстановкой.

Решение

$$y' = \frac{1 + \dfrac{y}{x} - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{2 - 2 \cdot \dfrac{y}{x}}.$$

Это однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Замена: $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$u'x + u = \frac{1 + u - u^2}{2 - 2u};\ u'x = -\frac{u^2 - u + 1}{2u - 2};\ x\frac{du}{dx} = -\frac{u^2 - u + 1}{2u - 2};\ \frac{(2u-2)du}{u^2 - u + 1} = -\frac{dx}{x}.$$

$$\int \frac{(2u-2)du}{u^2 - u + 1} = \int \frac{(2u - 1 - 1)du}{u^2 - u + 1} = \int \frac{(2u-1)du}{u^2 - u + 1} - \int \frac{du}{u^2 - u + 1} = \int \frac{d\left(u^2 - u + 1\right)}{u^2 - u + 1} - \int \frac{d\left(u - \dfrac{1}{2}\right)}{\left(u - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}} =$$

$$= \ln\left|u^2 - u + 1\right| - \frac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{u - \dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} + C = \ln\left|u^2 - u + 1\right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2u - 1}{\sqrt{3}} + C$$

$$\int \frac{(2u-2)du}{u^2 - u + 1} = -\int \frac{dx}{x};\ \ln\left|u^2 - u + 1\right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2u - 1}{\sqrt{3}} = -\ln|x| + C;$$

$$\ln\left|u^2 - u + 1\right| + \ln|x| - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2u - 1}{\sqrt{3}} = C;\ \ln\left|u^2 x - ux + x\right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2u - 1}{\sqrt{3}} = C.$$

Так как $y = ux$, то получим:

$$\ln\left|\frac{y^2}{x} - y + x\right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \dfrac{y}{x} - 1}{\sqrt{3}} = C;\ \ln\left|\frac{y^2}{x} - y + x\right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2y - x}{\sqrt{3}\,x} = C.$$

Проверка

Обозначим $F(x, y) = \ln\left|\dfrac{y^2}{x} - y + x\right| - \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{2y - x}{\sqrt{3}\,x} - C$.

$$F'_x=\frac{1}{\frac{y^2}{x}-y+x}\cdot\left(-\frac{y^2}{x^2}+1\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2y-x}{\sqrt{3}\cdot x}\right)^2}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{y}{x}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)'_x=$$

$$=\frac{x^2-y^2}{x\left(y^2-xy+x^2\right)}-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\frac{(2y-x)^2}{3x^2}}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{y}{x^2}\right)=\frac{x^2+xy-y^2}{x\left(y^2-xy+x^2\right)}.$$

$$F'_y=\frac{1}{\frac{y^2}{x}-y+x}\cdot\left(\frac{2y}{x}-1\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2y-x}{\sqrt{3}\cdot x}\right)^2}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{y}{x}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)'_y=$$

$$=\frac{2y-x}{y^2-xy+x^2}-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\frac{(2y-x)^2}{3x^2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{2y-2x}{y^2-xy+x^2}.$$

$$y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{x^2+xy-y^2}{x\left(y^2-xy+x^2\right)}\cdot\frac{y^2-xy+x^2}{2y-2x}=-\frac{x^2+xy-y^2}{x}\cdot\frac{1}{2y-2x}=\frac{x^2+xy-y^2}{2x^2-2xy}$$

Ответ: $\ln\left|\frac{y^2}{x}-y+x\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2y-x}{\sqrt{3}\,x}=C$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.