Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения $xy' = y\ln\frac{y}{x}$.

Решение

$$xy' = y\ln\frac{x}{y},\ y' = \frac{y}{x}\ln\frac{x}{y}.$$

Это однородное дифференциальное уравнение. Замена $y = u(x)\cdot x,\ y' = u'x + u$.

$$u'x + u = u\ln\frac{1}{u};\ u'x = -u\ln u - u;\ x\frac{du}{dx} = -u(\ln u + 1).$$

Если $\ln u + 1 = 0$, то $u = \frac{1}{e}$. Так как при $u = \frac{1}{e}$ имеем $x\frac{du}{dx} = 0$ и $-u(\ln u + 1) = 0$, то функция $u = \frac{1}{e}$ – решение уравнения $x\frac{du}{dx} = -u(\ln u + 1)$. Следовательно, функция $\frac{y}{x} = \frac{1}{e}$, т.е. $y = \frac{x}{e}$ – решение заданного уравнения. Пусть $u \neq \frac{1}{e}$, тогда получим:

$$\frac{du}{u(\ln u + 1)} = -\frac{dx}{x}.$$

При $C \neq 0$ получим:

$$\int\frac{du}{u(\ln u + 1)} = -\int\frac{dx}{x};\ \int\frac{d(\ln u + 1)}{\ln u + 1} = -\int\frac{dx}{x};\ \ln|\ln u + 1| = -\ln|x| + \ln|C|$$

$$\int\frac{d(\ln u + 1)}{\ln u + 1} = -\int\frac{dx}{x};\ \ln|\ln u + 1| = -\ln|x| + \ln|C|;\ \ln|\ln u + 1| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|;\ \ln u + 1 = \frac{C}{x};\ u = e^{\frac{C}{x}-1}.$$

Так как $u = \frac{y}{x}$, то $\frac{y}{x} = e^{\frac{C}{x}-1},\ y = x\cdot e^{\frac{C-x}{x}}$.

Решение $y = \frac{x}{e}$, найденное ранее, получается из выражения $y = x\cdot e^{\frac{C-x}{x}}$ при $C = 0$.

Следовательно, общее решение будет таким: $y = x\cdot e^{\frac{C-x}{x}},\ C \in R$.

Ответ: $y = x\cdot e^{\frac{C-x}{x}},\ C \in R$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.