Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Решить уравнение $xy' = \dfrac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$.

Решение

$$y' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{x\left(2y^2 + 2x^2\right)} = \frac{3\cdot\left(\dfrac{y}{x}\right)^3 + 4\cdot\dfrac{y}{x}}{2\cdot\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 2}$$

Данное уравнение является однородным, поэтому делаем замену $y = ux$, $y' = u'x + u$:

$$u'x + u = \frac{3u^3 + 4u}{2u^2 + 2};\ x\frac{du}{dx} = \frac{3u^3 + 4u}{2u^2 + 2} - u = \frac{u^3 + 2u}{2u^2 + 2};\ \frac{\left(2u^2 + 2\right)du}{u^3 + 2u} = \frac{dx}{x};\ \frac{\left(2u^2 + 2\right)du}{u\left(u^2 + 2\right)} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{2u^2 + 2}{u\left(u^2 + 2\right)} = \frac{u^2 + 2 + u^2}{u\left(u^2 + 2\right)} = \frac{1}{u} + \frac{u}{u^2 + 2}$$

$$\int\left(\frac{1}{u} + \frac{u}{u^2 + 2}\right)du = \int\frac{dx}{x};\ \ln|u| + \frac{1}{2}\ln\left|u^2 + 2\right| = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|C|;\ 2\ln|u| + \ln\left|u^2 + 2\right| = 2\ln|x| + \ln|C|;$$

$$\ln\left|u^2\right| + \ln\left|u^2 + 2\right| = \ln\left|x^2\right| + \ln|C|;\ \ln\left|u^2\left(u^2 + 2\right)\right| = \ln\left|Cx^2\right|;\ u^2\left(u^2 + 2\right) = Cx^2$$

Учитывая $u = \dfrac{y}{x}$, получим:

$$\frac{y^2}{x^2}\left(\frac{y^2}{x^2} + 2\right) = Cx^2;\ \frac{y^2\left(y^2 + 2x^2\right)}{x^6} = C$$

Ответ: $\dfrac{y^2\left(y^2 + 2x^2\right)}{x^6} = C$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.