Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения $\left(y^2-3x^2\right)dy+2xydx=0$, если $y(0)=1$.

Решение

$\left(y^2-3x^2\right)dy=-2xydx$, $\frac{dy}{dx}=\frac{-2xy}{y^2-3x^2}$, $y'=\frac{-2\cdot\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2-3}$.

Замена $y=ux$, $y'=u'x+u$:

$u'x+u=\frac{-2u}{u^2-3}$, $u'x=\frac{-2u}{u^2-3}-u=\frac{u-u^3}{u^2-3}$, $x\frac{du}{dx}=\frac{u-u^3}{u^2-3}$, $\frac{\left(3-u^2\right)}{u\left(u^2-1\right)}du=\frac{dx}{x}$, $\int\frac{3-u^2}{u(u-1)(u+1)}du=\int\frac{dx}{x}$.

$\frac{3-u^2}{u(u-1)(u+1)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u-1}+\frac{C}{u+1}=\frac{A(u-1)(u+1)+Bu(u+1)+Cu(u-1)}{u(u-1)(u+1)}$

$3-u^2=A(u-1)(u+1)+Bu(u+1)+Cu(u-1)$

$u=0$, $3=-A$, $A=-3$.

$u=1$, $2=2B$, $B=1$.

$u=-1$, $2=2C$, $C=1$.

$\frac{3-u^2}{u(u-1)(u+1)}=-\frac{3}{u}+\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u+1}$

$\int\left(-\frac{3}{u}+\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u+1}\right)du=\int\frac{dx}{x}$, $-3\ln|u|+\ln|u-1|+\ln|u+1|=\ln|x|+\ln|C|$, $\ln\left|\frac{u^2-1}{u^3}\right|=\ln|Cx|$,

$\frac{u^2-1}{u^3}=Cx$, $\frac{u^2x^2-x^2}{u^3x^3}=C$, $\frac{y^2-x^2}{y^3}=C$.

Так как $y(0)=1$, то $\frac{1-0}{1}=C$, $C=1$, $\frac{y^2-x^2}{y^3}=1$.

Ответ: $\frac{y^2-x^2}{y^3}=1$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.