Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найдите общее решение дифференциального уравнения первого порядка: $y' \cdot x^2 = \dfrac{y^2 + 6xy + 4x^2}{2}$.

Решение

$$2y' = \frac{y^2 + 6xy + 4x^2}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 6 \cdot \frac{y}{x} + 4$$

Замена $y = ux$, $y' = u'x + u$:

$$2u'x + 2u = u^2 + 6u + 4,\ 2u'x = u^2 + 4u + 4,\ 2ux \cdot \frac{du}{dx} = (u+2)^2,\ \frac{2udu}{(u+2)^2} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{2u+4-4}{(u+2)^2}du = \int \frac{dx}{x},\ \int \frac{2(u+2)-4}{(u+2)^2}du = \int \frac{dx}{x},\ \int \left(\frac{2}{u+2} - 4\cdot(u+2)^{-2}\right)d(u+2) = \int \frac{dx}{x}$$

$$2\ln|u+2| + \frac{4}{u+2} = \ln|x| + C,\ 2\ln\left|\frac{y}{x}+2\right| + \frac{4}{\frac{y}{x}+2} - \ln|x| = C,\ 2\ln\left|\frac{y}{x}+2\right| + \frac{4x}{y+2x} - \ln|x| = C.$$

Ответ: $2\ln\left|\dfrac{y}{x}+2\right| + \dfrac{4x}{y+2x} - \ln|x| = C$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.