Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Решить дифференциальное уравнение первого порядка: $y' = \frac{y}{x} + 3\sin^2\frac{y}{x}$.

Решение

Это однородное дифференциальное уравнение. Замена: $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$u'x + u = u + 3\sin^2 u;\ u'x = 3\sin^2 u.$$

Рассмотрим случай $\sin^2 u = 0$, т.е. $u = \pi k$, $k \in Z$. Проверим, являются ли данные функции решениями уравнения $u'x = 3\sin^2 u$. Подставляя $u = \pi k$, получим:

$$0 \cdot x = 3\sin^2 \pi k,\ 0 = 0.$$

Следовательно, функции $u = \pi k$ являются решениями. При условии $u \neq \pi k$ разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{du}{dx}x = 3\sin^2 u;\ \frac{dx}{x} = \frac{du}{3\sin^2 u};\ \int\frac{dx}{x} = \frac{1}{3}\int\frac{du}{\sin^2 u}.$$

$$\ln|x| = -\frac{1}{3}\cdot\operatorname{ctg}u + C;\ \ln|x| + \frac{1}{3}\operatorname{ctg}u = C.$$

Так как $u = \frac{y}{x}$, то получим:

$$\ln|x| + \frac{1}{3}\operatorname{ctg}u = C \Rightarrow \ln|x| + \frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{y}{x} = C$$

$$u = \pi k \Rightarrow \frac{y}{x} = \pi k;\ y = \pi k\, x$$

Ответ: $\ln|x| + \frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{y}{x} = C$, $y = \pi k\, x$ $(k \in Z)$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.