Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Решить дифференциальное уравнение $y'=\dfrac{x+8y-9}{10x-y-9}$. Найти общий интеграл и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=2$.

Решение

Заданное уравнение имеет вид $y'=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, где $a_1=1$, $b_1=8$, $c_1=-9$, $a_2=10$, $b_2=-1$, $c_2=-9$.

$$\Delta=a_1b_2-a_2b_1=1\cdot(-1)-10\cdot 8=-81$$

Так как среди c_1 и c_2 есть значение, отличное от нуля, и $\Delta\neq 0$, то данное уравнение сводится к однородному с помощью замены обеих переменных: $x=u+a$, $y=v+b$.

$$\frac{dv}{du}=\frac{u+8v+a+8b-9}{10u-v+10a-b-9}$$

$$\begin{cases}a+8b-9=0\\10a-b-9=0\end{cases}\quad\begin{cases}a=9-8b\\10a-b-9=0\end{cases}$$

$$90-80b-b-9=0;\ 81b=81;\ b=1;\ a=9-8=1.$$

$x=u+1$, $y=v+1$.

$$\frac{dv}{du}=\frac{u+8v}{10u-v}=\frac{1+8\cdot\dfrac{v}{u}}{10-\dfrac{v}{u}}.$$

Замена $v=zu$, $v'=z'u+z$:

$$z'u+z=\frac{1+8z}{10-z};\ z'u=\frac{z^2-2z+1}{10-z};\ z'u=\frac{(z-1)^2}{10-z}.$$

Функция $z=1$ – решение полученного уравнения. При условии $z\neq 1$ разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{10-z}{(z-1)^2}dz=\frac{du}{u}$$

$$\frac{10-z}{(z-1)^2}=\frac{9-(z-1)}{(z-1)^2}=9(z-1)^{-2}-\frac{1}{z-1}$$

$$\int\left(9(z-1)^{-2}-\frac{1}{z-1}\right)dz=\int\frac{du}{u},\ -\frac{9}{z-1}-\ln|z-1|=\ln|u|-C,\ \ln|u|+\frac{9}{z-1}+\ln|z-1|=C.$$

$$\ln|u|+\frac{9}{z-1}+\ln|z-1|=C \Rightarrow \ln|u|+\frac{9}{\frac{v}{u}-1}+\ln\left|\frac{v}{u}-1\right|=C;\ \frac{9u}{v-u}+\ln|v-u|=C;\ \frac{9(x-1)}{y-x}+\ln|y-x|=C.$$

$$z=1 \Rightarrow \frac{v}{u}=1 \Rightarrow\ v=u;\ \ y-1=x-1;\ y=x.$$

Найдём частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=2$:

$$\frac{9\cdot(1-1)}{2-1}+\ln|2-1|=C,\ C=0.$$

Искомое частное решение: $\frac{9(x-1)}{y-x}+\ln|y-x|=0$.

Ответ:

- Общее решение: $\frac{9(x-1)}{y-x}+\ln|y-x|=C,\ y=x$.
- Частное решение: $\frac{9(x-1)}{y-x}+\ln|y-x|=0$

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.