Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'-4xy=e^{2x^2}\left(1+x^2\right)$, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=e^2$.

Решение

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Замена $y=uv$, $y'=u'v+uv'$:

$$u'v+uv'-4xuv=e^{2x^2}\left(1+x^2\right),\ u'v+u\left(v'-4xv\right)=e^{2x^2}\left(1+x^2\right).$$

$v'-4xv=0$, $\dfrac{dv}{dx}=4xv$, $\dfrac{dv}{v}=4xdx$, $\ln|v|=2x^2$, $v=e^{2x^2}$.

$u'\cdot e^{2x^2}=e^{2x^2}\left(1+x^2\right)$, $u'=1+x^2$, $u=\int\left(x^2+1\right)dx=\dfrac{x^3}{3}+x+C$.

$$y=uv=\left(\frac{x^3}{3}+x+C\right)\cdot e^{2x^2}.$$

Так как $y(1)=e^2$, то $e^2=\left(\dfrac{4}{3}+C\right)\cdot e^2$, $C=-\dfrac{1}{3}$, $y=\left(\dfrac{x^3}{3}+x-\dfrac{1}{3}\right)\cdot e^{2x^2}$.

Ответ: $y=\left(\dfrac{x^3}{3}+x-\dfrac{1}{3}\right)\cdot e^{2x^2}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.