Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти решение дифференциального уравнения $y'\operatorname{ctg}x - y = 2\cos^2 x \cdot \operatorname{ctg}x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$.

Решение

$$y' - \frac{y}{\operatorname{ctg}x} = 2\cos^2 x;\ y' - \operatorname{tg}x \cdot y = 2\cos^2 x.$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Замена: $y = uv$.

$u'v + uv' - \operatorname{tg}x \cdot uv = 2\cos^2 x;\ u'v + u(v' - \operatorname{tg}x \cdot v) = 2\cos^2 x.$

$v' - \operatorname{tg}x \cdot v = 0;\ \frac{dv}{dx} = \operatorname{tg}x \cdot v;\ \frac{dv}{v} = \operatorname{tg}x\,dx;\ \ln|v| = -\ln|\cos x|;\ v = \frac{1}{\cos x}.$

$$u' \cdot \frac{1}{\cos x} = 2\cos^2 x;\ u' = 2\cos^3 x.$$

$$u = 2\int \cos^3 x dx = 2\int \cos^2 x \cdot \cos x dx = 2\int (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = 2\sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + C.$$

Общее решение будет таким: $y = uv = \frac{1}{\cos x} \cdot \left(2\sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + C\right)$.

Так как $y(0) = 0$, то получим: $0 = 1 \cdot (0 + C)$, $C = 0$. Искомое частное решение будет таким:

$$y = \frac{1}{\cos x} \cdot \left(2\sin x - \frac{2\sin^3 x}{3}\right)$$

Ответ: $y = \frac{1}{\cos x} \cdot \left(2\sin x - \frac{2\sin^3 x}{3}\right)$

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.