Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения $y' = \frac{2x+y-3}{x-1}$. Проверить правильность решения обратной подстановкой.

Решение

$$y' = \frac{y}{x-1} + \frac{2x-3}{x-1};\ y' - \frac{y}{x-1} = \frac{2x-3}{x-1}.$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Замена: $y = uv$, $y' = u'v + uv'$:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x-1} = \frac{2x-3}{x-1};\ u'v + u\cdot\left(v' - \frac{v}{x-1}\right) = \frac{2x-3}{x-1}.$$

$$v' - \frac{v}{x-1} = 0;\ \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x-1};\ \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x-1};\ \frac{dv}{v} = \frac{d(x-1)}{x-1};\ \ln|v| = \ln|x-1|;\ v = x-1.$$

$$u'\cdot(x-1) = \frac{2x-3}{x-1};\ u' = \frac{2x-3}{(x-1)^2}.$$

$$u = \int \frac{2x-3}{(x-1)^2}dx = \int \frac{2x-2-1}{(x-1)^2}dx = \int \frac{2(x-1)-1}{(x-1)^2}dx = \int\left(\frac{2}{x-1} - (x-1)^{-2}\right)dx = 2\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + C.$$

$$y = uv = \left(2\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + C\right)\cdot(x-1) = 2(x-1)\ln|x-1| + C(x-1) + 1.$$

Проверка

$$y' = 2\ln|x-1| + 2(x-1)\cdot\frac{1}{x-1} + C = 2\ln|x-1| + C + 2$$

$$y' - \frac{2x+y-3}{x-1} = 2\ln|x-1| + C + 2 - \frac{2x + 2(x-1)\ln|x-1| + C(x-1) + 1 - 3}{x-1} =$$

$$= 2\ln|x-1| + C + 2 - \frac{2(x-1) + 2(x-1)\ln|x-1| + C(x-1)}{x-1} = 2\ln|x-1| + C + 2 - (2 + 2\ln|x-1| + C) = 0.$$

Ответ: $y = 2(x-1)\ln|x-1| + C(x-1) + 1.$

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.