Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти решение задачи Коши: $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$, $y(0) = 1$.

Решение

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Замена $y = uv$, $y' = u'v + uv'$:

$$u'v + uv' + uv \cdot \mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x};\ u'v + u \cdot (v' + v \cdot \mathrm{tg}\,x) = \frac{1}{\cos x}.$$

$$v' + v \cdot \mathrm{tg}\,x = 0;\ \frac{dv}{dx} = -v \cdot \frac{\sin x}{\cos x};\ \frac{dv}{v} = -\frac{\sin x dx}{\cos x};\ \frac{dv}{v} = \frac{d(\cos x)}{\cos x};\ \ln|v| = \ln|\cos x|;\ v = \cos x.$$

$$u' \cos x = \frac{1}{\cos x};\ u' = \frac{1}{\cos^2 x};\ u = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + C.$$

$$y = uv = \cos x \cdot (\mathrm{tg}\,x + C) = \cos x \cdot \left(\frac{\sin x}{\cos x} + C\right) = \sin x + C\cos x.$$

Так как $y(0) = 1$, то $1 = 0 + C \cdot 1$, $C = 1$. Следовательно, $y = \sin x + \cos x$.

Ответ: $y = \sin x + \cos x$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.