Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Решить уравнение методом Бернулли. Сделать проверку. Найти решение задачи Коши.

$$\frac{dy}{dx}+\frac{7y}{9+x^2}=\frac{1}{9+x^2},\ y(0)=1.$$

Решение

Замена: $y=uv$, $y'=u'v+uv'$.

$$u'v+uv'+\frac{7uv}{9+x^2}=\frac{1}{9+x^2},\ u'v+u\cdot\left(v'+\frac{7v}{9+x^2}\right)=\frac{1}{9+x^2}.$$

$$v'+\frac{7v}{9+x^2}=0,\ \frac{dv}{dx}=-\frac{7v}{9+x^2},\ \frac{dv}{v}=-\frac{7dx}{9+x^2},\ \ln|v|=-\frac{7}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3},\ v=e^{-\frac{7}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}}.$$

$$u'\cdot e^{-\frac{7}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}}=\frac{1}{9+x^2},\ u'=\frac{e^{\frac{7}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}}}{9+x^2}.$$

$$u=\int\frac{e^{\frac{7}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}}}{9+x^2}dx=\frac{1}{7}\int e^{\frac{7}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}}d\left(\frac{7}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)=\frac{1}{7}\cdot e^{\frac{7}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}}+C.$$

$$y=uv=\left(\frac{1}{7}\cdot e^{\frac{7}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}}+C\right)\cdot e^{-\frac{7}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}}=\frac{1}{7}+C\cdot e^{-\frac{7}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}}.$$

Проверка

$$\frac{dy}{dx}+\frac{7y}{9+x^2}=C\cdot e^{-\frac{7}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}}\cdot\left(-\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{7\cdot\left(\frac{1}{7}+C\cdot e^{-\frac{7}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}}\right)}{9+x^2}=-C\cdot e^{-\frac{7}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}}\cdot\frac{7}{x^2+9}+\frac{1}{x^2+9}+$$

$$+\frac{7C\cdot e^{-\frac{7}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}}}{9+x^2}=\frac{1}{x^2+9}.$$

Для нахождения частного решения учтём, что $y(0)=1$:

$$1=\frac{1}{7}+C\cdot e^0,\ C=\frac{6}{7},\ y=\frac{1}{7}+\frac{6}{7}\cdot e^{-\frac{7}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}}.$$

Ответ:

- Общее решение: $y=\frac{1}{7}+C\cdot e^{-\frac{7}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}}$

- Частное решение: $y = \frac{1}{7} + \frac{6}{7} \cdot e^{-\frac{7}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}}$

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.