Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Решение

Найти решение задачи Коши для уравнения $y' = e^{x+y} + e^{-x-y}$, $y(0) = 1$.

Решение

$$y' = e^{x+y} + e^{-(x+y)}.$$

Замена $u(x) = y(x) + x$, $y = u - x$, $y' = u' - 1$.

$u' - 1 = e^u + e^{-u}$, $u' = e^u + e^{-u} + 1$, $\frac{du}{dx} = e^u + e^{-u} + 1$, $\frac{du}{e^u + e^{-u} + 1} = dx$, $\int \frac{du}{e^u + e^{-u} + 1} = \int dx$.

$$\int \frac{du}{e^u + e^{-u} + 1} = \int \frac{e^u du}{e^{2u} + 1 + e^u} = \int \frac{d\left(e^u\right)}{\left(e^u\right)^2 + e^u + 1} = \int \frac{d\left(e^u + \frac{1}{2}\right)}{\left(e^u + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{e^u + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2e^u + 1}{\sqrt{3}} + C$$

Возвращаясь к равенству $\int \frac{du}{e^u + e^{-u} + 1} = \int dx$, получим:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2e^u + 1}{\sqrt{3}} = x + C, \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2e^{x+y} + 1}{\sqrt{3}} - x = C.$$

Так как $y(0) = 1$, то $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2e + 1}{\sqrt{3}} = C$, т.е. $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2e^{x+y} + 1}{\sqrt{3}} - x = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2e + 1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2e^{x+y} + 1}{\sqrt{3}} - x = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2e + 1}{\sqrt{3}}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.