Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти общий интеграл дифференциального уравнения: $y' = \dfrac{1-3x-3y}{1+x+y}$.

Решение

Заданное уравнение имеет вид $y' = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, где $a_1 = -3$, $b_1 = -3$, $c_1 = 1$, $a_2 = 1$, $b_2 = 1$, $c_2 = 1$.

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = -3\cdot 1 - 1\cdot(-3) = 0$$

Так как $\Delta = 0$, то данное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $z = 1-3x-3y$. Так как $z = 1-3(x+y)$, то $x+y = \dfrac{1-z}{3}$.

$z'_x = -3-3y'$, $y' = \dfrac{z'_x+3}{-3}$.

$$\frac{z'_x+3}{-3} = \frac{z}{1+\dfrac{1-z}{3}},\ z'_x+3 = \frac{-9z}{4-z},\ z'_x = \frac{6z+12}{z-4}.$$

Функция $z = -2$ – решение полученного уравнения. При условии $z \neq -2$ разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{6z+12}{z-4};\ \frac{(z-4)dz}{6z+12} = dx;\ \int\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{z+2}\right)dz = \int dx;\ \frac{z}{6} - \ln|z+2| = x + C_1.$$

Так как $z = 1-3x-3y$, то из полученного равенства будем иметь:

$$\begin{aligned}
&\frac{1-3x-3y}{6} - \ln|3-3x-3y| = x + C_1,\\
&1-3x-3y-6\ln|3(1-x-y)| = 6x+6C_1,\\
&1-3x-3y-6\ln 3-6\ln|1-x-y| = 6x+6C_1,\\
&9x+3y+6\ln|1-x-y| = -6C_1+1-6\ln 3.
\end{aligned}$$

Переобозначим $C = -6C_1+1-6\ln 3$, тогда $3x+y+2\ln|1-x-y| = C$.

Рассмотрим решение $z = -2$. Так как $z = 1-3x-3y$, то получим:

$$1-3x-3y = -2,\ y = 1-x.$$

Ответ: $3x+y+2\ln|1-x-y| = C$, $y = 1-x$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.