Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Укажите тип дифференциального уравнения первого порядка $y' = (2y+1)\operatorname{tg} x$. Найдите общее решение уравнения. Выполните проверку.

Решение

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Проверим, является ли решением данного уравнения функция $y = -\frac{1}{2}$:

$$y' - (2y+1)\operatorname{tg} x = 0 - \left(2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right)\operatorname{tg} x = 0.$$

Следовательно, функция $y = -\frac{1}{2}$ – решение исходного уравнения. При условии $y \neq -\frac{1}{2}$ разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dy}{dx} = (2y+1)\operatorname{tg} x;\ \frac{dy}{2y+1} = \operatorname{tg} x\, dx.$$

$$\int \frac{dy}{2y+1} = \int \operatorname{tg} x\, dx;\ \int \frac{d(2y+1)}{2y+1} = 2\int \operatorname{tg} x dx;\ \ln|2y+1| = -2\ln|\cos x| + \ln \overline{C},\ \overline{C} > 0.$$

$$\ln|2y+1| = \ln \frac{\overline{C}}{\cos^2 x};\ |2x+1| = \frac{\overline{C}}{\cos^2 x};\ 2y+1 = \pm \frac{\overline{C}}{\cos^2 x}.$$

Переобозначая $\pm\overline{C}$ как $2C$, где $C \in R \setminus \{0\}$, имеем $2y+1 = \frac{2C}{\cos^2 x}$; $y = \frac{C}{\cos^2 x} - \frac{1}{2}$. Решение $y = -\frac{1}{2}$ получается из выражения $y = \frac{C}{\cos^2 x} - \frac{1}{2}$ при $C = 0$. Следовательно, условие $C \in R \setminus \{0\}$ можно изменить, приняв $C \in R$.

Проверка

Для проверки представим данное уравнение в таком виде: $y' - (2y+1)\operatorname{tg} x = 0$.

$$y' = C \cdot \left((\cos x)^{-2}\right)' - 0 = -\frac{2C}{\cos^3 x} \cdot (-\sin x) = \frac{2C \sin x}{\cos^3 x}.$$

$$y' - (2y+1)\operatorname{tg} x = \frac{2C\sin x}{\cos^3 x} - \left(2 \cdot \left(\frac{C}{\cos^2 x} - \frac{1}{2}\right) + 1\right)\operatorname{tg} x = \frac{2C\sin x}{\cos^3 x} - \frac{2C}{\cos^2 x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

Следовательно, найденная функция является решением исходного уравнения.

Ответ: $y = \dfrac{C}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{2},\ C \in R.$

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.