Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Решить дифференциальное уравнение $\cos x \sin y dx - \sin x \cos y dy = 0$.

Решение

Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Рассмотрим отдельно случаи $\sin y = 0$ и $\sin x = 0$. Если $\sin y = 0$, то $y = \pi k_1$, $k_1 \in Z$. Проверим, являются ли функции $y = \pi k_1$ решениями заданного уравнения:

$$\cos x \sin y dx - \sin x \cos y dy = \cos x \sin(\pi k_1) dx - \sin x \cos(\pi k_1) \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, функции $y = \pi k_1$ – решения исходного уравнения.

Если $\sin x = 0$, то $x = \pi k_2$, $k_2 \in Z$. Проверим, являются ли функции $x = \pi k_2$ решениями заданного уравнения:

$$\cos x \sin y dx - \sin x \cos y dy = \cos(\pi k_2) \sin y \cdot 0 - \sin(\pi k_2) \cos y dy = 0.$$

Следовательно, функции $x = \pi k_2$ – решения исходного уравнения.

При условии $y \neq \pi k_1$ и $x \neq \pi k_2$ разделяем переменные и интегрируем:

$$\sin x \cos y dy = \cos x \sin y dx; \ \frac{\cos y dy}{\sin y} = \frac{\cos x dx}{\sin x}.$$

$$\int \frac{\cos y \, dy}{\sin y} = \int \frac{\cos x \, dx}{\sin x}; \ \int \frac{d(\sin y)}{\sin y} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x}; \ \ln|\sin y| = \ln|\sin x| + \ln C_1, \ C_1 > 0.$$

$$\ln|\sin y| = \ln(C_1|\sin x|); \ |\sin y| = C_1|\sin x|; \ \sin y = \pm C_1 \sin x.$$

Переобозначая $\pm C_1$ как C, где $C \neq 0$, получим: $\sin y = C \sin x$. Решения $y = \pi k_1$, найденные ранее, можно получить из выражения $\sin y = C \sin x$ при $C = 0$. Следовательно, можно принять $C \in R$.

Ответ: $\sin y = C \sin x$; $x = \pi k$ ($k \in Z$).

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.