Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти общий интеграл дифференциального уравнения $\left(\sqrt{xy}-\sqrt{x}\right)dy+ydx=0$.

Решение

Для данного уравнения имеем $x\ge 0$ и $xy\ge 0$, откуда получим $y\ge 0$. Это значит, что $\sqrt{xy}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$.

$$\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{y}-1\right)dy+ydx=0$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. При $y=0$ получим:

$$\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{y}-1\right)dy+ydx=\sqrt{x}\cdot(0-1)\cdot 0+0\cdot dx=0.$$

Следовательно, $y=0$ – решение данного уравнения. При $y>0$ получим:

$$\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{y}-1\right)dy=-ydx;\ \frac{\left(\sqrt{y}-1\right)dy}{y}=-\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$\int\frac{\left(\sqrt{y}-1\right)dy}{y}=-\int\frac{dx}{\sqrt{x}};\ \int\left(y^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{y}\right)dy=-\int x^{-\frac{1}{2}}dx.$$

$$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\ln|y|=-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+2C;\ 2\sqrt{y}-\ln|y|=-2\sqrt{x}+2C;\ \sqrt{x}+\sqrt{y}-\frac{1}{2}\ln|y|=C.$$

Так как $y>0$, то $|y|=y$, поэтому общий интеграл будет таким: $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\frac{1}{2}\ln y=C$.

Ответ: $y=0$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\frac{1}{2}\ln y=C$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.