Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Показать, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют базис. Найти разложение вектора $\bar{d}$ по этому базису, если $\bar{a}=(2;2;3)$, $\bar{b}=(5;1;2)$, $\bar{c}=(-1;-3;-2)$, $\bar{d}=(8;0;1)$.

Решение

Рассмотрим матрицу $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -1\\ 2 & 1 & -3\\ 3 & 2 & -2\end{pmatrix}$, элементы которой есть координаты векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

$$\Delta A=\begin{vmatrix}2 & 5 & -1\\ 2 & 1 & -3\\ 3 & 2 & -2\end{vmatrix}=-4-45-4+3+20+12=-18$$

Так как $\Delta A=-18\neq 0$, то векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ линейно независимы, т.е. образуют базис. Найдём A^{-1}.

$$A_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & -2\end{vmatrix}=4;\ A_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-5;\ A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=1.$$

$$A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}5 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=8;\ A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-1;\ A_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 2\end{vmatrix}=11.$$

$$A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-14;\ A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=4;\ A_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}2 & 5\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-8.$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix}4 & 8 & -14\\ -5 & -1 & 4\\ 1 & 11 & -8\end{pmatrix}.$$

Координаты вектора $\bar{d}$ в базисе $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ будут такими:

$$-\frac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix}4 & 8 & -14\\ -5 & -1 & 4\\ 1 & 11 & -8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix}32-14\\ -40+4\\ 8-8\end{pmatrix}=-\frac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix}18\\ -36\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}.$$

Следовательно, для вектора $\bar{d}$ имеем:

$$\bar{d}=-1\cdot\bar{a}+2\cdot\bar{b}+0\cdot\bar{c}=-\bar{a}+2\bar{b}$$

Ответ: $\bar{d}=-\bar{a}+2\bar{b}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.