Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

В базисе $\bar{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\bar{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\bar{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ заданы векторы $\begin{pmatrix}7\\-5\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-4\\0\\-3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\-8\\4\end{pmatrix}$. Установить, составляют ли они базис. Если составляют, то найти связь между новым и старым базисами, а также найти компоненты вектора $\bar{p}=\begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix}$ в новом базисе.

Решение

Обозначим $\bar{\alpha}_1=\begin{pmatrix}7\\-5\\0\end{pmatrix}$, $\bar{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-4\\0\\-3\end{pmatrix}$, $\bar{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\-8\\4\end{pmatrix}$. Так как $\begin{vmatrix}7&-4&0\\-5&0&-8\\0&-3&4\end{vmatrix}=-248\neq 0$, то векторы $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$, $\bar{\alpha}_3$ являются линейно независимыми, а значит составляют базис.

Найдем связь между новым и старым базисами, а также координаты вектора $\bar{p}$ в новом базисе.

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc}7&-4&0&1&0&0&2\\-5&0&-8&0&1&0&-5\\0&-3&4&0&0&1&4\end{array}\right) I:7 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc}1&-4/7&0&1/7&0&0&2/7\\-5&0&-8&0&1&0&-5\\0&-3&4&0&0&1&4\end{array}\right) II+5\cdot I \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc}1&-4/7&0&1/7&0&0&2/7\\0&-20/7&-8&5/7&1&0&-25/7\\0&-3&4&0&0&1&4\end{array}\right) II:(-20/7) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc}1&-4/7&0&1/7&0&0&2/7\\0&1&14/5&-1/4&-7/20&0&5/4\\0&-3&4&0&0&1&4\end{array}\right) \begin{array}{l}I+4/7\cdot II\\ \\III+3\cdot II\end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc}1&0&8/5&0&-1/5&0&1\\0&1&14/5&-1/4&-7/20&0&5/4\\0&0&62/5&-3/4&-21/20&1&31/4\end{array}\right) III:62/5 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc}1&0&8/5&0&-1/5&0&1\\0&1&14/5&-1/4&-7/20&0&5/4\\0&0&1&-15/248&-21/248&5/62&5/8\end{array}\right) \begin{array}{l}I-8/5\cdot III\\II-14/5\cdot III\\ \\ \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc}1&0&0&3/31&-2/31&-4/31&0\\0&1&0&-5/62&-7/62&-7/31&-1/2\\0&0&1&-15/248&-21/248&5/62&5/8\end{array}\right).$$

Связь между старым и новым базисами:

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = \frac{3}{31}\bar{\alpha}_1 - \frac{5}{62}\bar{\alpha}_2 - \frac{15}{248}\bar{\alpha}_3; \\ \bar{e}_2 = -\frac{2}{31}\bar{\alpha}_1 - \frac{7}{62}\bar{\alpha}_2 - \frac{21}{248}\bar{\alpha}_3; \\ \bar{e}_3 = -\frac{4}{31}\bar{\alpha}_1 - \frac{7}{31}\bar{\alpha}_2 + \frac{5}{62}\bar{\alpha}_3. \end{cases}$$

Координаты вектора $\bar{p}$ в новом базисе: $\bar{p} = -\frac{1}{2}\bar{\alpha}_2 + \frac{5}{8}\bar{\alpha}_3$, т.е. $\bar{p}\left(0;-\frac{1}{2};\frac{5}{8}\right)$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.