Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & -9 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ двумя способами: с помощью эквивалентных преобразований и методом окаймляющих миноров.

Решение

Первый способ (с помощью эквивалентных преобразований)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & -9 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \left[\begin{matrix} \textit{Меняем местами} \\ \textit{первую и пятую строки} \end{matrix}\right] \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & -9 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} III+3\cdot I \to \\ IV-2\cdot I \\ V-2\cdot I \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -11 & 0 & 16 \\ 0 & 12 & 0 & -8 \\ 0 & 12 & 0 & -15 \end{pmatrix} \begin{matrix} II\cdot(-1) \\ \\ IV:4 \\ V:3 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -11 & 0 & 16 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ III+11\cdot II \\ IV-3\cdot II \\ V-4\cdot II \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ III:(-17) \to \\ IV:7 \\ V:7 \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ IV-III \\ V-III \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица, приведенная к ступенчатому виду, содержит три ненулевых строки. Следовательно, $\operatorname{rang} A=3$.

Второй способ (метод окаймляющих миноров)

Применим метод окаймляющих миноров. Рассмотрим минор второго порядка, лежащий на пересечении строк №1, №2 и столбцов №1, №2:

$$M_2=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-2-0=-2.$$

Так как $M_2\neq 0$, то рассмотрим миноры третьего порядка, окаймляющие M_2:

$$M_3=\begin{vmatrix}2&2&6\\0&-1&0\\-3&4&-9\end{vmatrix}=-1\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2&6\\-3&-9\end{vmatrix}=-(-18+18)=0.$$

$$M_3'=\begin{vmatrix}2&2&-5\\0&-1&3\\-3&4&1\end{vmatrix}=-2-18+0+15-0-24=-29.$$

Так как $M_3'\neq 0$, то рассмотрим миноры четвёртого порядка, окаймляющие M_3':

$$M_4=\begin{vmatrix}2&2&6&-5\\0&-1&0&3\\-3&4&-9&1\\2&2&6&2\end{vmatrix}\begin{matrix}\\\\\\IV-I\end{matrix}=\begin{vmatrix}2&2&6&-5\\0&-1&0&3\\-3&4&-9&1\\0&0&0&7\end{vmatrix}=7\cdot\begin{vmatrix}2&2&6\\0&-1&0\\-3&4&-9\end{vmatrix}=7\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}2&6\\-3&-9\end{vmatrix}=$$

$$=-7\cdot(-18+18)=0.$$

$$M_4'=\begin{vmatrix}2&2&6&-5\\0&-1&0&3\\-3&4&-9&1\\1&-5&3&5\end{vmatrix}=\left[IV\,стб+3\cdot II\,стб\right]=\begin{vmatrix}2&2&6&1\\0&-1&0&0\\-3&4&-9&13\\1&-5&3&-10\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}2&6&1\\-3&-9&13\\1&3&-10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&6&1\\3&9&-13\\1&3&-10\end{vmatrix}=$$

$$=-180-78+9-9+180+78=0.$$

Так как все окаймляющие миноры четвёртого порядка равны нулю, то $\operatorname{rang}A=3$.

Ответ: 3.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.