Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Решить систему уравнений тремя способами: по формулам Крамера, методом Гаусса-Жордана, средствами матричного исчисления. Сделать проверку правильности вычисления обратной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ -5x_1 - 4x_2 + x_3 = -11 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 7 \end{cases}$$

Решение

Метод Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -5 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 12 - 10 + 2 - 16 - 15 + 1 = -26$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -11 & -4 & 1 \\ 7 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 48 - 22 + 7 - 56 - 33 + 4 = -52$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -5 & -11 & 1 \\ 2 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 33 + 70 + 8 - 44 - 60 - 7 = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -5 & -4 & -11 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -28 + 20 - 22 + 32 + 35 - 11 = 26$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-52}{-26} = 2;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-26} = 0;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{26}{-26} = -1.$$

Метод Гаусса-Жордана.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ -5 & -4 & 1 & -11 \\ 2 & -1 & -3 & 7 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ II + 5 \cdot I \\ III - 2 \cdot I \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -9 & 9 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} I - II \\ \\ III + 3 \cdot II \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & -26 & 26 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ III : (-26) \end{matrix} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} I - 7 \cdot III \\ II + 9 \cdot III \\ \\ \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Из последней матрицы имеем: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$.

Решение средствами матричного исчисления

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -5 & -4 & 1\\ 2 & -1 & -3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}4\\ -11\\ 7\end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix};\ X=A^{-1}B.$$

Ранее был получен результат $\Delta A=-26$.

$$A_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -1 & -3\end{vmatrix}=13;\ A_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}-5 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-13;\ A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}-5 & -4\\ 2 & -1\end{vmatrix}=13.$$

$$A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & -3\end{vmatrix}=5;\ A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{vmatrix}=1;\ A_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=3.$$

$$A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ -4 & 1\end{vmatrix}=-7;\ A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ -5 & 1\end{vmatrix}=9;\ A_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -5 & -4\end{vmatrix}=1.$$

Обратная матрица: $A^{-1}=-\frac{1}{26}\cdot\begin{pmatrix}13 & 5 & -7\\ -13 & 1 & 9\\ 13 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

Проверка правильности вычисления обратной матрицы:

$$A^{-1}A=-\frac{1}{26}\cdot\begin{pmatrix}13 & 5 & -7\\ -13 & 1 & 9\\ 13 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -5 & -4 & 1\\ 2 & -1 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{26}\cdot\begin{pmatrix}13\cdot1+5\cdot(-5)+(-7)\cdot2 & 13\cdot1+5\cdot(-4)+(-7)\cdot(-1) & 13\cdot(-2)+5\cdot1+(-7)\cdot(-3)\\ -13\cdot1+1\cdot(-5)+9\cdot2 & -13\cdot1+1\cdot(-4)+9\cdot(-1) & -13\cdot(-2)+1\cdot1+9\cdot(-3)\\ 13\cdot1+3\cdot(-5)+1\cdot2 & 13\cdot1+3\cdot(-4)+1\cdot(-1) & 13\cdot(-2)+3\cdot1+1\cdot(-3)\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{26}\cdot\begin{pmatrix}-26 & 0 & 0\\ 0 & -26 & 0\\ 0 & 0 & -26\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Обратная матрица найдена верно. Исходя из равенства $X=A^{-1}B$, получим:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=-\frac{1}{26}\cdot\begin{pmatrix}13 & 5 & -7\\ -13 & 1 & 9\\ 13 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ -11\\ 7\end{pmatrix}=-\frac{1}{26}\cdot\begin{pmatrix}-52\\ 0\\ 26\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ -1\end{pmatrix}.$$

Из последнего равенства имеем: $x_1=2$, $x_2=0$, $x_3=-1$.

Ответ: $x_1=2$, $x_2=0$, $x_3=-1$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.