Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Доказать совместность системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20; \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$ и решить её:

а) средствами матричного исчисления;
б) методом Гаусса;
в) по формулам Крамера.

Решение

Матрица системы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

Расширенная матрица системы: $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 20 \\ 3 & -2 & -5 & 6 \end{array}\right)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 20 \\ 3 & -2 & -5 & 6 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ II - 2\cdot I \\ III - 3\cdot I \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & 4 & -14 & -12 \end{array}\right) III : 2 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & 2 & -7 & -6 \end{array}\right) III - 2/7\cdot II \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & 0 & -29/7 & -58/7 \end{array}\right)$$

Так как система имеет три переменных и $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} = 3$, то согласно следствию из теоремы Кронекера-Капелли система имеет единственное решение.

а) Решение средствами матричного исчисления

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.,\ X = A^{-1}\cdot B.$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 12 + 24 - 27 - 8 - 20 = -58.$$

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -23,\ A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -2,\ A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -13.$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -16,\ A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -14,\ A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4.$$

$$A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-1,\ A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -4\end{vmatrix}=10,\ A_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=7.$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{58}\cdot\begin{pmatrix}-23 & -16 & -1\\ -2 & -14 & 10\\ -13 & -4 & 7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=-\frac{1}{58}\cdot\begin{pmatrix}-23 & -16 & -1\\ -2 & -14 & 10\\ -13 & -4 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\ 20\\ 6\end{pmatrix}=-\frac{1}{58}\cdot\begin{pmatrix}-464\\ -232\\ -116\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\ 4\\ 2\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_1=8,\ x_2=4,\ x_3=2$.

б) метод Гаусса

При исследовании системы на совместность была получена матрица $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & 6\\ 0 & 7 & -10 & 8\\ 0 & 0 & -29/7 & -58/7\end{array}\right)$.

Переходя к системе получим:

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=6;\\ 7x_2-10x_3=8;\\ -\frac{29}{7}x_3=-\frac{58}{7}.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=6;\\ 7x_2-10x_3=8;\\ x_3=2.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1-2x_2=0;\\ 7x_2=28;\\ x_3=2.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1-2x_2=0;\\ x_2=4;\\ x_3=2.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=8;\\ x_2=4;\\ x_3=2.\end{cases}$$

в) метод Крамера

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -4\\ 3 & -2 & -5\end{vmatrix}=-58.$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}6 & -2 & 3\\ 20 & 3 & -4\\ 6 & -2 & -5\end{vmatrix}=-90-120+48-54-48-200=-464.$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 6 & 3\\ 2 & 20 & -4\\ 3 & 6 & -5\end{vmatrix}=-100+36-72-180+24+60=-232.$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & 6\\ 2 & 3 & 20\\ 3 & -2 & 6\end{vmatrix}=18-24-120-54+40+24=-116.$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-464}{-58}=8,\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-232}{-58}=4,\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-116}{-58}=2.$$

Ответ: $x_1=8,\ x_2=4,\ x_3=2$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре,
аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.