Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Проверить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$ на совместность. В случае, если система совместна, построить решение.

Решение

Найдём ранги матрицы системы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ и расширенной матрицы системы $A^r = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right)$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \to \left[\begin{array}{l} \textit{меняем местами} \\ \textit{первую и вторую строки} \end{array}\right] \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} II - 2 \cdot I \\ III - I \\ IV - 3 \cdot I \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ 3 \cdot III - 2 \cdot II \\ IV - II \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Матрица A^r, а вместе с ней и матрица A, приведена к ступенчатому виду. Так как в приведённой матрице 3 ненулевых строки, то $\operatorname{rang} A^r = \operatorname{rang} A = 3$. Следовательно, система совместна. Так как количество неизвестных равно 4, то система является неопределённой, т.е. имеет бесконечное количество решений.

Продолжим преобразования полученной матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) III : 11 \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) II + III \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) -1/3 \cdot II \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) I - II \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Переходим от матрицы к системе:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 1 - x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Принимая $x_3 = C$, получим: $\begin{cases} x_1 = 1 - C \\ x_2 = -C \\ x_3 = C \\ x_4 = 0 \end{cases}$

Общее решение системы будет таким: $X = C \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.