Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Доказать совместность системы $\begin{cases} -x_1 - 9x_2 - 4x_3 = -8, \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$ и решить её тремя способами: по формулам Крамера, методом Гаусса и средствами матричного исчисления.

Решение

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -9 & -4 & 0 & -8 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) I\cdot(-1) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 9 & 4 & 0 & 8 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ II-2\cdot I \\ III-3\cdot I \end{matrix} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 9 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & -22 & -10 & 2 & -20 \end{array}\right) III-2\cdot II \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 9 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) II:(-11) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 9 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Так как ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы и меньше количества переменных, то система совместна и неопределена. Продолжим решение *методом Гаусса*:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 9 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) II:(-11) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 9 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 5/11 & -1/11 & 10/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) I-9\cdot II \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/11 & 9/11 & -2/11 \\ 0 & 1 & 5/11 & -1/11 & 10/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{1}{11}x_3 + \dfrac{9}{11}x_4 = -\dfrac{2}{11}; \\ x_2 + \dfrac{5}{11}x_3 - \dfrac{1}{11}x_4 = \dfrac{10}{11}. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{11}x_3 - \dfrac{9}{11}x_4 - \dfrac{2}{11}; \\ x_2 = -\dfrac{5}{11}x_3 + \dfrac{1}{11}x_4 + \dfrac{10}{11}; \\ x_3 \in R;\ x_4 \in R. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{11}x_3 - \dfrac{9}{11}x_4 - \dfrac{2}{11}; \\ x_2 = -\dfrac{5}{11}x_3 + \dfrac{1}{11}x_4 + \dfrac{10}{11}; \\ x_3 \in R;\ x_4 \in R. \end{cases}$

Решение по формулам Крамера

$$\begin{cases} -x_1 - 9x_2 - 4x_3 = -8, \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = -x_4 + 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -2x_4 + 4. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -9 & -4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как $\Delta = 0$, то хотя бы одно из двух уравнений линейно зависимо от иных. Так как $\begin{vmatrix} -1 & -9 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$, то третье уравнение является линейной комбинацией первого и второго.

$$\begin{cases} -x_1 - 9x_2 - 4x_3 = -8, \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = -x_4 + 6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 - 9x_2 = 4x_3 - 8, \\ 2x_1 + 7x_2 = -3x_3 - x_4 + 6. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -9 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 11;\ \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 4x_3 - 8 & -9 \\ -3x_3 - x_4 + 6 & 7 \end{vmatrix} = x_3 - 9x_4 - 2;\ \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} -1 & 4x_3 - 8 \\ 2 & -3x_3 - x_4 + 6 \end{vmatrix} = -5x_3 + x_4 + 10.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4 - \frac{2}{11};\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = -\frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4 + \frac{10}{11}.$$

Следовательно, $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4 - \frac{2}{11}; \\ x_2 = -\frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4 + \frac{10}{11}; \\ x_3 \in R;\ x_4 \in R. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4 - \frac{2}{11}; \\ x_2 = -\frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4 + \frac{10}{11}; \\ x_3 \in R;\ x_4 \in R. \end{cases}$

Решение средствами матричного исчисления

Как и при решении методом Крамера оставляем первое и второе уравнения системы:

$$\begin{cases} -x_1 - 9x_2 = 4x_3 - 8, \\ 2x_1 + 7x_2 = -3x_3 - x_4 + 6. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 4x_3 - 8 \\ -3x_3 - x_4 + 6 \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.,\ X = A^{-1}B.$$

$\Delta A = 11;$

$A_{11} = 7;\ A_{12} = -2;\ A_{21} = 9;\ A_{22} = -1.$

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4x_3 - 8 \\ -3x_3 - x_4 + 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} x_3 - 9x_4 - 2 \\ -5x_3 + x_4 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4 - \frac{2}{11} \\ -\frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4 + \frac{10}{11} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4 - \frac{2}{11}; \\ x_2 = -\frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4 + \frac{10}{11}; \\ x_3 \in R;\ x_4 \in R. \end{cases}$

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.