Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Исследовать СЛАУ на совместность и в случае совместности решить её методом Гаусса. Указать число базисных решений и найти одно из них.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=1 \\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4=-1 \\ 2x_1+3x_2-2x_3+x_4=-3 \end{cases}$$

Решение

Матрица системы: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; расширенная матрица системы: $\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right)$. Найдём ранги данных матриц:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ II-3\cdot I \\ III-2\cdot I \end{matrix}\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right)\to\left|\begin{array}{l} \textit{Поменяем местами} \\ \textit{вторую и третью строки} \end{array}\right|\to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & -7 & 5 & -4 & -4 \end{array}\right)II\cdot(-1)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & 5 & -4 & -4 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ III+7\cdot II \end{matrix}\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 31 \end{array}\right)$$

Из последней матрицы имеем: $\operatorname{rang}A=3$, $\operatorname{rang}\overline{A}=3$. Так как система содержит 4 переменных, и при этом $\operatorname{rang}A=\operatorname{rang}\overline{A}=3<4$, то согласно следствию из критерия Кронекера-Капелли система является совместной и неопределённой, т.е. имеет бесконечное количество решений.

В качестве свободной переменной можно выбрать любую из переменных x_1, x_2, x_3 или x_4. Остальные три переменные будут базисными. Следовательно, существует 4 базисных решения. Найдём одно из них, перенося четвёртый столбец полученной матрицы за черту:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 31 & -3 \end{array}\right)III:5\to\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 31/5 & -3/5 \end{array}\right)I+III\to\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 36/5 & -8/5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 31/5 & -3/5 \end{array}\right)I-2\cdot II\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -14/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 31/5 & -3/5 \end{array}\right)$$

Из последней матрицы имеем общее решение: $\begin{cases} x_1 = -\frac{14}{5} + \frac{2}{5}x_4 \\ x_2 = 5 - x_4 \\ x_3 = \frac{31}{5} - \frac{3}{5}x_4 \\ x_4 = x_4;\ x_4 \in R \end{cases}$. Полагая $x_4 = 0$, получим базисное решение: $\begin{cases} x_1 = -\frac{14}{5} \\ x_2 = 5 \\ x_3 = \frac{31}{5} \\ x_4 = 0 \end{cases}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.