Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Используя метод Жордана-Гаусса, исследовать совместность системы уравнений и если она совместна, то найти её решение. Если система неопределённая, то найти два общих и соответствующие им базисные решения.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+5x_4+7x_5=8 \\ 2x_1+2x_2+2x_3+6x_4+12x_5=12 \\ x_1+3x_2+3x_3+5x_4+12x_5=16 \end{cases}$$

Решение

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & 7 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 12 & 12 \\ 1 & 3 & 3 & 5 & 12 & 16 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ II-I \\ III-I \end{matrix}\to\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 5 & 8 \end{array}\right)II:(-2)\to\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 5 & 8 \end{array}\right)\begin{matrix} I-2\cdot II \\ \\ III-II \end{matrix}\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 5 & 8 \end{array}\right)\begin{matrix} I-2\cdot II \\ \\ III-II \end{matrix}\to\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right)III:2\to\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)\begin{matrix} I-III \\ \\ \\ \end{matrix}\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы $\operatorname{rang}A=3$; ранг расширенной матрицы системы $\operatorname{rang}\tilde{A}=3$. Так как система содержит три переменных, т.е. $\operatorname{rang}A=\operatorname{rang}\tilde{A}=3<5$, то согласно следствию из теоремы Кронекера-Капелли система является неопределённой, т.е. имеет бесконечное количество решений.

Первое общее решение найдём, перенося за черту столбцы переменных x_4, x_5, x_6:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Общее решение: $\begin{cases} x_1=1-2x_4-3x_5 \\ x_2=2-2x_4-x_5 \\ x_3=3+x_4-2x_5 \end{cases}$.

Базисное решение: $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \\ x_3=3 \\ x_4=0 \\ x_5=0 \end{cases}$

Чтобы найти второе общее решение, перенесём за черту столбцы переменных x_3 и x_5:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right) III \cdot (-1) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} I - 2 \cdot III \\ II - 2 \cdot III \\ \to \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Общее решение: $\begin{cases} x_1 = 7 - 2x_3 - 7x_5 \\ x_2 = 8 - 2x_3 - 5x_5 \\ x_4 = -3 + x_3 + 2x_5 \end{cases}$.

Базисное решение: $\begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 8 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -3 \\ x_5 = 0 \end{cases}$

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.