Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Исследовать на совместность и несовместность систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = 1 \end{cases}$$

Решение

Найдём ранги матрицы системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{pmatrix}$ и расширенной матрицы системы $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & 1 \end{array}\right)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ II - I \\ III - I \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right)$$

Если $\lambda = 0$, то полученная матрица примет следующий вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Так как $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 1 < 3$, то согласно следствию из критерия Кронекера-Капелли система является неопределенной, т.е. имеет бесконечное количество решений. Из первой строки имеем уравнение $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, из которого следует общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - x_3; \\ x_2 = x_2; \\ x = x_3. \end{cases}, \text{ где } x_2 \in R,\ x_3 \in R.$$

Если $\lambda \neq 0$, то:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ II : \lambda \\ III : \lambda \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Так как $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 3$, то согласно следствию из критерия Кронекера-Капелли система является определенной, т.е. имеет единственное решение. Продолжим решение методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}I-III\\ \\ \\ \end{array}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}I-II\\ \\ \\ \end{array}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right).$$

Из полученной матрицы имеем: $x_1=1,\ x_2=0,\ x_3=0$.

Ответ:

- Если $\lambda=0$, то система является неопределенной. Общее решение: $\begin{cases}x_1=1-x_2-x_3;\\ x_2=x_2;\\ x=x_3.\end{cases}$

Если $\lambda\neq 0$, то система является определенной. В этом случае $\begin{cases}x_1=1;\\ x_2=0;\\ x=0.\end{cases}$

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.