Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Используя теорему Кронекера-Капелли, исследовать на совместность систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 = -2 \\ x_1 - 8x_2 - 12x_3 + x_4 = 14 \\ 4x_1 + 3x_2 + 15x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

Решение

Матрица системы: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & -8 & -12 & 1 \\ 4 & 3 & 15 & 11 \end{pmatrix}$.

Расширенная матрица системы: $\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & -2 \\ 1 & -8 & -12 & 1 & 14 \\ 4 & 3 & 15 & 11 & 0 \end{array}\right)$.

Найдём ранги этих матриц.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & -2 \\ 1 & -8 & -12 & 1 & 14 \\ 4 & 3 & 15 & 11 & 0 \end{array}\right) \to \left[\begin{array}{l} \textit{Поменяем местами} \\ \textit{первую и вторую строки} \end{array}\right] \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 6 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & -8 & -12 & 1 & 14 \\ 4 & 3 & 15 & 11 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} II - 2 \cdot I \\ III - I \\ IV - 4 \cdot I \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 6 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & -9 & -1 & 8 \\ 0 & -10 & -18 & -2 & 16 \\ 0 & -5 & -9 & -1 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ III - 2 \cdot II \\ IV - II \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 6 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & -9 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ранги матрицы системы и расширенной матрицы системы будут такими: $\operatorname{rang} A = 2$, $\operatorname{rang} \tilde{A} = 2$. Так как $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A}$, то согласно теореме Кронекера-Капелли система является совместной, т.е. имеет решение. Так как система содержит 4 переменных, и $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} = 2 < 4$, то согласно следствию из теоремы Кронекера-Капелли система является неопределённой, т.е. имеет бесконечное количество решений.

Ответ: система является неопределённой.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.