Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Исследовать однородную СЛАУ $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+4x_4+x_5=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3+x_4-5x_5=0 \\ x_1+3x_2-x_3+6x_4-x_5=0 \end{cases}$ на существование нетривиального решения. В случае существования найти общее решение и выделить из него фундаментальную систему решений.

Решение

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 6 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ II-2\cdot I \\ III-I \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -7 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left|\begin{array}{l} \text{поменяем местами} \\ \text{вторую и третью строки} \end{array}\right| \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -7 & -7 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ III+3\cdot II \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & -13 & 0 \end{array}\right)$$

Ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы и равен 3. Так как система содержит 5 переменных, то согласно следствию из критерия Кронекера-Капелли система является неопределенной, т.е. имеет бесконечное количество решений.

Выберем в качестве свободных переменных x_3 и x_5. Перенося за черту третий и пятый столбцы и продолжая решение методом Гаусса получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 13 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ III\cdot(-1) \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -13 \end{array}\right) \begin{matrix} I-4\cdot III \\ II-2\cdot III \\ \\ \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 19 & 51 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -13 \end{array}\right) \begin{matrix} I-2\cdot II \\ \\ \\ \end{matrix} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -13 \end{array}\right)$$

Общее решение: $\begin{cases} x_1=-5x_3-5x_5 \\ x_2=12x_3+28x_5 \\ x_4=-5x_3-13x_5 \end{cases}$

Фундаментальная система решений: $\begin{cases} x_1=-5 \\ x_2=12 \\ x_3=1 \\ x_4=-5 \\ x_5=0 \end{cases}, \begin{cases} x_1=-5 \\ x_2=28 \\ x_3=0 \\ x_4=-13 \\ x_5=1 \end{cases}.$

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.