Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти фундаментальную систему решений заданной СЛАУ: $\begin{cases} 2x_1+2x_3+2x_4+x_5=0 \\ 6x_1+2x_2+4x_3+5x_4+x_5=0 \\ 6x_1+4x_2+2x_3+4x_4-x_5=0 \\ 8x_1+8x_2+4x_4-4x_5=0 \end{cases}$

Решение

Применим метод Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II-3\cdot I \\ III-3\cdot I \\ IV-4\cdot I \end{array} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & -4 & -8 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III-2\cdot I \\ IV-4\cdot I \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} I:2 \\ II:2 \\ \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Из последней матрицы имеем:

$$\begin{cases} x_1+x_3+x_4+\dfrac{1}{2}x_5=0 \\ x_2-x_3-\dfrac{1}{2}x_4-x_5=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1=-x_3-x_4-\dfrac{1}{2}x_5 \\ x_2=x_3+\dfrac{1}{2}x_4+x_5 \end{cases}.$$

Переменные x_1, x_2 являются базисными; переменные x_3, x_4, x_5 – свободными. Полагая $x_3=C_1$, $x_4=C_2$, $x_5=C_3$, получим общее решение:

$$\begin{cases} x_1=-C_1-C_2-\dfrac{1}{2}C_3 \\ x_2=C_1+\dfrac{1}{2}C_2+C_3 \\ x_3=C_1 \\ x_4=C_2 \\ x_5=C_3 \end{cases}$$

Фундаментальная система решений: $\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=1 \\ x_3=1 \\ x_4=0 \\ x_5=0 \end{cases}, \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=1/2 \\ x_3=0 \\ x_4=1 \\ x_5=0 \end{cases}, \begin{cases} x_1=-1/2 \\ x_2=1 \\ x_3=0 \\ x_4=0 \\ x_5=1 \end{cases}.$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1/2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = -1/2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 1 \end{cases}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.