Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Исследовать на совместность и найти общее решение системы: $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_2 + 14x_4 = -8 \end{cases}$.

Решение

Матрица системы: $A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 5 & 6 \\ 6 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 14 \end{pmatrix}$.

Расширенная матрица системы: $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 9 & -3 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \end{array}\right)$.

Применим метод Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 9 & -3 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \end{array}\right) \to \left[\begin{array}{c} \textit{Поменяем местами} \\ \textit{первую и третью строки} \end{array}\right] \to \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 6 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & -3 & 5 & 6 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} II - 2 \cdot I \\ III - 3 \cdot I \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -24 & 21 \\ 0 & 0 & -4 & -36 & 28 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II : (-3) \\ III : (-4) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -7 \end{array}\right) III - II \to \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Матрица системы и расширенная матрица системы приведены к ступенчатому виду. Так как преобразованная матрица системы и расширенная матрица содержат три ненулевых строки, то $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 3$. Так как система содержит 4 переменных, то согласно следствию из теоремы Кронекера-Капелли она является неопределённой, т.е. имеет бесконечное количество решений. Продолжим метод Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} I - 14 \cdot III \\ II - 8 \cdot III \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) I - 3 \cdot II \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) I : 3 \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 0 & 13/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Из последней матрицы имеем:

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{1}{3} x_2 = \dfrac{13}{3} \\ x_3 = -7 \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3} x_2 + \dfrac{13}{3} \\ x_3 = -7 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Полагая $x_2 = 3t$ получим *общее решение*: $\begin{cases} x_1 = t + \frac{13}{3} \\ x_2 = 3t \\ x_3 = -7 \\ x_4 = 0 \end{cases}$. Переменные x_1, x_3 и x_4 – базисные, переменная x_2 – свободная.

Ответ: система является неопределённой, $\begin{cases} x_1 = t + \frac{13}{3} \\ x_2 = 3t \\ x_3 = -7 \\ x_4 = 0 \end{cases}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.