Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Дана функция $z=x^2-y^2$ и уравнение связи $2x-y-3=0$. Найти условный экстремум. Решить задачу двумя способами: с помощью уменьшения числа переменных и с помощью функции Лагранжа.

Решение

Первый способ (уменьшение количества переменных)

Из уравнения связи имеем: $y=2x-3$.

$$u(x)=z(x,2x-3)=x^2-(2x-3)^2=-3x^2+12x-9$$

$u'=-6x+12$, $u''=-6$.

$$u'=0 \Leftrightarrow -6x+12=0 \Leftrightarrow x=2.$$

Так как $u''(2)=-6<0$, то $x=2$ – точка максимума функции $u(x)$. Максимум функции $u(x)$ будет таким:

$$u_{\max}=u(2)=-3\cdot 2^2+12\cdot 2-9=3$$

Если $x=2$, то $y=2\cdot 2-3=1$, т.е. $(2;1)$ – точка условного максимума функции $z(x,y)$. Условный максимум: $z_{\max}=u_{\max}=3$.

Второй способ (с помощью функции Лагранжа)

$$F(x,y)=x^2-y^2+k\cdot(2x-y-3)$$

$F'_x=2x+2k$; $F'_y=-2y-k$.

$$\begin{cases} x+k=0; \\ 2y+k=0; \\ 2x-y=3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-k; \\ y=-\dfrac{k}{2}; \\ 2x-y=3. \end{cases}$$

$-2k+\dfrac{k}{2}=3$; $-\dfrac{3k}{2}=3$; $k=-2$.

$x=-k=2$; $y=-\dfrac{k}{2}=1$.

Получили точку $M(2;1)$.

$$F''_{xx}=2;\ F''_{xy}=0;\ F''_{yy}=-2.$$

$$d^2F=2dx^2-2dy^2$$

Дифференцируем уравнение связи: $d(2x-y-3)=0$, $2dx-dy=0$, $dy=2dx$.

$$d^2F = 2dx^2 - 2\cdot(2dx)^2 = -6dx^2$$

Так как $d^2F < 0$, то $M(2;1)$ – точка условного максимума. При этом

$$z_{max} = z(2;1) = 2^2 - 1^2 = 3$$

Ответ: $(2;1)$ – точка условного максимума, $z_{max} = 3$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.