Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Методом множителей Лагранжа определить стационарные точки функции $z=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ и исследовать их характер при условии $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=1$.

Решение

Условие связи $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=1$ запишем в таком виде: $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}-1=0$. Обозначим $\varphi(x_1,x_2)=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}-1$.

Функция Лагранжа имеет такой вид:

$$F=z(x_1,x_2)+\lambda\cdot\varphi(x_1,x_2)=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\lambda\cdot\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}-1\right)$$

$F'_{x_1}=-\frac{1}{x_1^2}+\lambda\cdot(-2)\cdot x_1^{-3}=-\frac{1}{x_1^2}-\frac{2\lambda}{x_1^3}$, $F'_{x_2}=-\frac{1}{x_2^2}+\lambda\cdot(-2)\cdot x_2^{-3}=-\frac{1}{x_2^2}-\frac{2\lambda}{x_2^3}$.

Записываем систему уравнений $\begin{cases}F'_{x_1}=0;\\F'_{x_2}=0;\\\varphi(x_1,x_2)=0.\end{cases}$ и из неё находим стационарные точки:

$$\begin{cases}-\frac{1}{x_1^2}-\frac{2\lambda}{x_1^3}=0;\\-\frac{1}{x_2^2}-\frac{2\lambda}{x_2^3}=0;\\\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}-1=0.\end{cases}\qquad\begin{cases}x_1+2\lambda=0;\\x_2+2\lambda=0;\\\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}-1=0.\end{cases}\qquad\begin{cases}x_1=-2\lambda;\\x_2=-2\lambda;\\\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}-1=0.\end{cases}$$

Подставляя $x_1=-2\lambda$ и $x_2=-2\lambda$ в третье уравнение, будем иметь:

$$\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}-1=0,\ \frac{1}{2\lambda^2}=1,\ \lambda^2=\frac{1}{2},\ \lambda_1=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \lambda_2=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Подставляя $\lambda_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, находим x_1 и x_2: $x_1=-2\lambda_1=-2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$, $x_2=-2\lambda_1=-2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$. Получили стационарную точку $M_1\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

Подставляя $\lambda_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$, находим x_1 и x_2: $x_1=-2\lambda_2=-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$, $x_2=-2\lambda_2=-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$. Получили стационарную точку $M_2\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$.

Таким образом, имеем две стационарные точки $M_1\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ и $M_2\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$.

Чтобы определить характер экстремума в найденных стационарных точках, выясним знак определителя $H=\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_{x_1} & \varphi'_{x_2} \\ \varphi'_{x_1} & F''_{x_1x_1} & F''_{x_1x_2} \\ \varphi'_{x_2} & F''_{x_1x_2} & F''_{x_2x_2} \end{vmatrix}$ в этих точках.

$$\varphi'_{x_1}=-\frac{2}{x_1^3},\ \varphi'_{x_2}=-\frac{2}{x_2^3},\ F''_{x_1x_1}=\frac{2}{x_1^3}+\frac{6\lambda}{x_1^4},\ F''_{x_1x_2}=0,\ F''_{x_2x_2}=\frac{2}{x_2^3}+\frac{6\lambda}{x_2^4}.$$

Запишем определитель H в общем виде:

$$H=\begin{vmatrix} 0 & -\frac{2}{x_1^3} & -\frac{2}{x_2^3} \\ -\frac{2}{x_1^3} & \frac{2}{x_1^3}+\frac{6\lambda}{x_1^4} & 0 \\ -\frac{2}{x_2^3} & 0 & \frac{2}{x_2^3}+\frac{6\lambda}{x_2^4} \end{vmatrix}=8\cdot\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{x_1^3} & -\frac{1}{x_2^3} \\ -\frac{1}{x_1^3} & \frac{1}{x_1^3}+\frac{3\lambda}{x_1^4} & 0 \\ -\frac{1}{x_2^3} & 0 & \frac{1}{x_2^3}+\frac{3\lambda}{x_2^4} \end{vmatrix}=8\cdot\left(-\frac{1}{x_2^6}\cdot\left(\frac{1}{x_1^3}+\frac{3\lambda}{x_1^4}\right)-\frac{1}{x_1^6}\cdot\left(\frac{1}{x_2^3}+\frac{3\lambda}{x_2^4}\right)\right)=$$

$$=-\frac{8}{x_1^3x_2^3}\cdot\left(\frac{1}{x_2^3}\cdot\left(1+\frac{3\lambda}{x_1}\right)+\frac{1}{x_1^3}\cdot\left(1+\frac{3\lambda}{x_2}\right)\right)$$

В точке $M_1\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ получим:

$$H(M_1)=-\frac{8}{8}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\left(1+\frac{3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\left(1+\frac{3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

В точке $M_2\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ получим:

$$H(M_2)=-\frac{8}{8}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\left(1+\frac{3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\left(1+\frac{3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\sqrt{2}}\right)\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Так как $H(M_1)>0$, то в точке $M_1\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ функция имеет условный максимум.

$$z_{\max}=z(M_1)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

Так как $H(M_2)<0$, то в точке $M_2\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ функция имеет условный минимум.

$$z_{\min}=z(M_2)=\frac{1}{-\sqrt{2}}+\frac{1}{-\sqrt{2}}=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}.$$

Ответ:

- $\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ – точка условного минимума, $z_{\min}=-\sqrt{2}$.
- $\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ – точка условного максимума, $z_{\max}=\sqrt{2}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.