Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти экстремумы функции $z=3xy$ при условии, что $x^2+y^2=2$.

Решение

$$F=3xy+\lambda\cdot\left(x^2+y^2-2\right)$$

$F'_x=3y+2\lambda x$, $F'_y=3x+2\lambda y$.

$$\begin{cases}3y+2\lambda x=0\\3x+2\lambda y=0\\x^2+y^2=2\end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим:

$$3\cdot(y-x)-2\lambda\cdot(y-x)=0,\ (3-2\lambda)\cdot(y-x)=0,\ \left[\begin{array}{l}3-2\lambda=0\\y-x=0\end{array}\right.,\ \left[\begin{array}{l}\lambda=\dfrac{3}{2}\\y=x\end{array}\right.$$

Если $\lambda=\dfrac{3}{2}$, то из первого уравнения имеем: $3y+3x=0$, $y=-x$. Подставляя в третье уравнение, получим:

$$2x^2=2,\ x^2=1,\ \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$$

Имеем точки $M_1(-1;1)$, $M_2(1;-1)$ при $\lambda=\dfrac{3}{2}$.

Если $y=x$, то подставляя в третье уравнение, получим:

$$2x^2=2,\ x^2=1,\ \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$$

Имеем точки $M_3(-1;-1)$, $M_4(1;1)$. В этом случае $\lambda=-\dfrac{3y}{2x}=-\dfrac{3}{2}$.

$$F''_{xx}=2\lambda,\ F''_{xy}=3,\ F''_{yy}=2\lambda.$$

$$d^2F=2\lambda dx^2+6dxdy+2\lambda dy^2.$$

Так как $x^2+y^2=2$, то дифференцируя данное равенство по x получим:

$$2xdx+2ydy=0,\ dy=-\frac{xdx}{y}.$$

$$d^2F = 2\lambda dx^2 + 6dxdy + 2\lambda dy^2 = 2\lambda dx^2 + 6dx \cdot \left(-\frac{xdx}{y}\right) + 2\lambda \cdot \left(-\frac{xdx}{y}\right)^2 = \left(2\lambda - \frac{6x}{y} + \frac{2\lambda x^2}{y^2}\right)dx^2$$

В точках $M_1(-1;1)$ и $M_2(1;-1)$ имеем $d^2F = 12dx^2 > 0$, т.е. данные точки являются точками условного минимума.

$$z(M_1) = z(M_2) = -3$$

В точках $M_3(-1;-1)$, $M_4(1;1)$ имеем $d^2F = -12dx^2 < 0$, т.е. данные точки являются точками условного максимума.

$$z(M_3) = z(M_4) = 3$$

Следовательно, $z_{\min} = -3$, $z_{\max} = 3$.

Ответ:

- $(-1;1)$ и $(1;-1)$ – точки условного минимума, $z_{\min} = -3$
- $(-1;-1)$ и $(1;1)$ – точки условного максимума, $z_{\max} = 3$

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.