Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Используя метод множителей Лагранжа исследовать функцию $z = x + 4y$ на условный экстремум при $xy = 2$.

Решение

Обозначим $\varphi(x, y) = xy - 2$. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = z(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y) = x + 4y + \lambda \cdot (xy - 2).$$

$L'_x = 1 + \lambda y$; $L'_y = 4 + \lambda x$.

$$\begin{cases} 1 + \lambda y = 0 \\ 4 + \lambda x = 0 \\ xy - 2 = 0 \end{cases}$$

Если $\lambda = 0$, то из первого уравнения имеем $1 = 0$. Полученное противоречие говорит о том, что $\lambda \neq 0$. Следовательно, из первого и второго уравнений получим: $x = -\frac{4}{\lambda}$; $y = -\frac{1}{\lambda}$. Подставляя в третье уравнение, будем иметь:

$$-\frac{4}{\lambda} \cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right) - 2 = 0;\ \frac{4}{\lambda^2} = 2,\ \lambda^2 = 2;\ \lambda_1 = -\sqrt{2};\ \lambda_2 = \sqrt{2}.$$

Если $\lambda_1 = -\sqrt{2}$, то $x_1 = -\frac{4}{-\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$; $y_1 = -\frac{1}{-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Получили точку $M_1\left(2\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Если $\lambda_2 = \sqrt{2}$, то $x_1 = -\frac{4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$; $y_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Получили точку $M_2\left(-2\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & y & x \\ y & 0 & \lambda \\ x & \lambda & 0 \end{vmatrix} = -(\lambda xy + \lambda xy) = -2\lambda xy.$$

$$\Delta(M_1) = -2 \cdot (-\sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2};\ \Delta(M_2) = -2 \cdot \sqrt{2} \cdot (-2\sqrt{2}) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4\sqrt{2}.$$

Так как $\Delta(M_1) > 0$, то точка M_1 является точкой условного минимума.

$$z_{\min} = z(M_1) = 2\sqrt{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}.$$

Так как $\Delta(M_2) < 0$, то точка M_2 является точкой условного максимума.

$$z_{\max} = z\left(M_2\right) = -2\sqrt{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -4\sqrt{2}\ .$$

Ответ:

- $\left(2\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ – точка минимума; $z_{\min} = 4\sqrt{2}$.
- $\left(-2\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ – точка максимума; $z_{\max} = -4\sqrt{2}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.