Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти условный экстремум функции $u=12x+20y+26z$, если $x^2+z^2=25$, $x+y+z=0$.

Решение

Запишем первое условие в форме $x^2+z^2-25=0$ и составим функцию Лагранжа:

$$F=12x+20y+26z+\lambda_1\left(x^2+z^2-25\right)+\lambda_2\left(x+y+z\right)$$

$F_x'=12+2\lambda_1 x+\lambda_2$; $F_y'=20+\lambda_2$; $F_z'=26+2\lambda_1 z+\lambda_2$.

$$\begin{cases}12+2\lambda_1 x+\lambda_2=0;\\ 20+\lambda_2=0;\\ 26+2\lambda_1 z+\lambda_2=0;\\ x^2+z^2=25;\\ x+y+z=0.\end{cases}$$

Из второго уравнения имеем: $\lambda_2=-20$. Тогда система станет такой:

$$\begin{cases}12+2\lambda_1 x-20=0;\\ \lambda_2=-20;\\ 26+2\lambda_1 z-20=0;\\ x^2+z^2=25;\\ x+y+z=0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1 x-4=0;\\ \lambda_2=-20;\\ \lambda_1 z+3=0;\\ x^2+z^2=25;\\ x+y+z=0.\end{cases}$$

Если предположить, что $x=0$, то из первого уравнения получим: $-4=0$. Полученное противоречие говорит о том, что $x\neq 0$. Исходя из этого, из первого уравнения имеем:

$$\lambda_1=\frac{4}{x}$$

Подставляя $\lambda_1=\frac{4}{x}$ в третье уравнение, получим:

$$\frac{4z}{x}+3=0;\ z=-\frac{3x}{4}.$$

Подставляя $z=-\frac{3x}{4}$ в третье уравнение, получим:

$$x^2+\left(-\frac{3x}{4}\right)^2=25;\frac{25x^2}{16}=25;\ x^2=16\Rightarrow x_1=-4;\ x_2=4.$$

Тогда $z_1=-\frac{3x_1}{4}=3$, $z_2=-\frac{3x_2}{4}=-3$. Так как $\lambda_1=\frac{4}{x}$, то:

$$\lambda_{11}=\frac{4}{x_1}=-1;\ \lambda_{12}=\frac{4}{x_2}=1.$$

Так как из четвёртого уравнения следует $y=-x-z$, то:

$$y_1=-x_1-z_1=4-3=1;\ y_2=-x_2-z_2=-4-(-3)=-1.$$

Имеем два решения системы уравнений:

$$x=-4;\ y=1;\ z=3;\ \lambda_1=-1;\ \lambda_2=-20;$$
$$x=4;\ y=-1;\ z=-3;\ \lambda_1=1;\ \lambda_2=-20.$$

Иными словами, найдены две стационарные точки: $M_1(-4;1;3)$ и $M_2(4;-1;-3)$.

Составим d^2F функции Лагранжа.

$$F''_{xx}=2\lambda_1;\ F''_{yy}=0;\ F''_{zz}=2\lambda_1;\ F''_{xy}=F''_{xz}=F''_{yz}=0.$$

$$d^2F=2\lambda_1dx^2+2\lambda_1dz^2=2\lambda_1\left(dx^2+dz^2\right).$$

В точке M_1 получим: $d^2F=2\cdot(-1)\left(dx^2+dz^2\right)=-2\left(dx^2+dz^2\right)$. Так как $d^2F<0$, то $M_1(-4;1;3)$ – точка условного максимума функции $u(x,y,z)$, при этом:

$$u_{\max}=u(-4,1,3)=50.$$

В точке M_2 получим: $d^2F=2\cdot1\cdot\left(dx^2+dz^2\right)=2\left(dx^2+dz^2\right)$. Так как $d^2F>0$, то $M_2(4;-1;-3)$ – точка условного минимума функции $u(x,y,z)$, при этом:

$$u_{\min}=u(4,-1,-3)=-50.$$

Ответ:

- $(4;-1;-3)$ – точка условного минимума, $u_{\min}=-50$.
- $(-4;1;3)$ – точка условного максимума, $u_{\max}=50$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.