Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Построить линии уровня функции $z = x^2 + y^2 - 6y$ и градиенты в заданных точках $M_1(0;2)$ и $M_2(-1;3)$.

Решение

$$z'_x = \left(x^2 + y^2 - 6y\right)'_x = 2x;\ z'_y = \left(x^2 + y^2 - 6y\right)'_y = 2y - 6.$$

В точке M_1 получим:

$$z(M_1) = 0 + 4 - 12 = -8;\ z'_x(M_1) = 2 \cdot 0 = 0;\ z'_y(M_1) = 4 - 6 = -2.$$

В точке M_2 получим:

$$z(M_2) = 1 + 9 - 18 = -8;\ z'_x(M_2) = 2 \cdot (-1) = -2;\ z'_y(M_2) = 6 - 6 = 0.$$

Градиент в точке M_1 будет таким: $\operatorname{grad} z(M_1) = 0 \cdot \bar{i} - 2 \cdot \bar{j} = -2\bar{j}$.

Градиент в точке M_2 будет таким: $\operatorname{grad} z(M_2) = -2 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} = -2\bar{i}$.

Линии уровня данной функции определяются такими уравнениями:

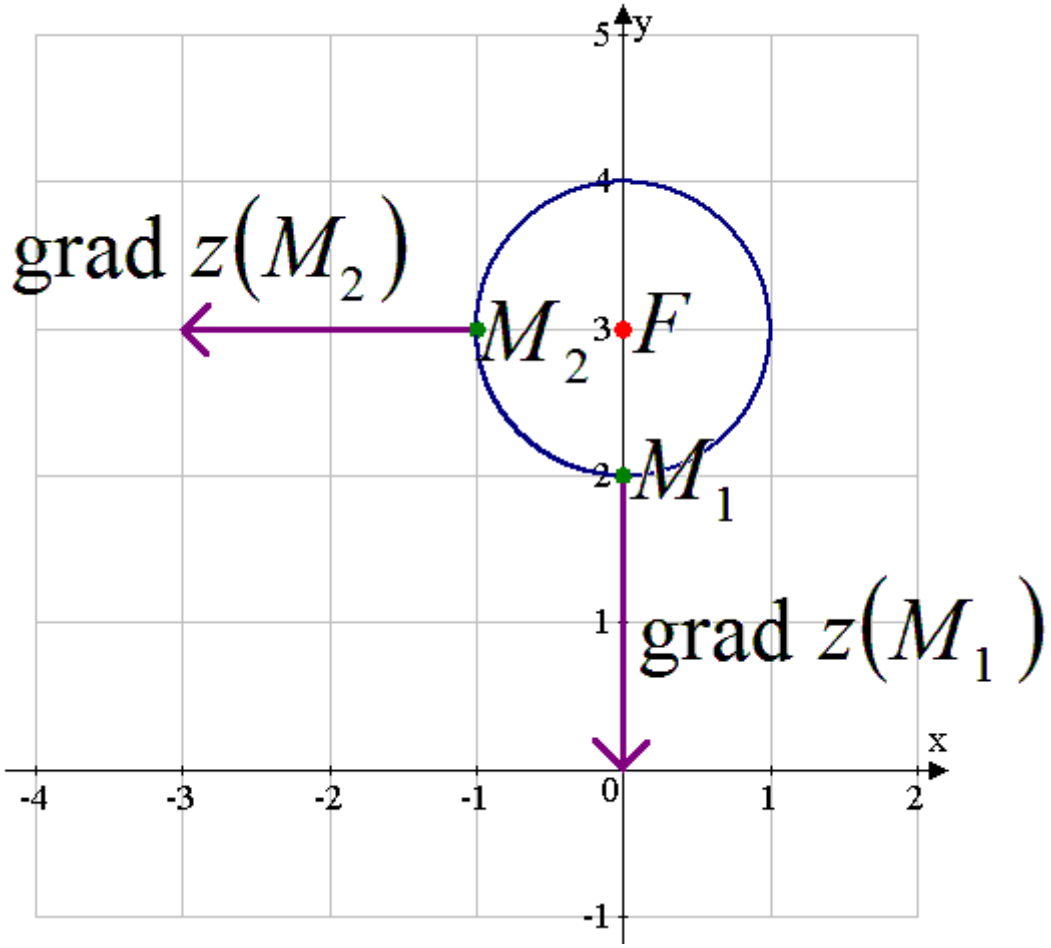
$$x^2 + y^2 - 6y = C,\ x^2 + y^2 - 6y + 9 = C + 9,\ x^2 + (y-3)^2 = C + 9.$$

Так как $x^2 + (y-3)^2 \geq 0$, то $C + 9 \geq 0$, т.е. $C \geq -9$. Если $C = -9$, то уравнение $x^2 + (y-3)^2 = 0$ задаёт точку $F(0;3)$. При $C > -9$ линиями уровня будут окружности с центром в точке $F(0;3)$ и радиусом $R = \sqrt{C+9}$.

В точках M_1 и M_2 имеем $C = z(M_1) = z(M_2) = -8$, поэтому линией уровня будет такая окружность:

$$x^2 + (y-3)^2 = 1$$

Центр данной окружности лежит в точке F, а радиус равен 1.



Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.