Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Для функции $z = x^2 + 3y^2 - 4x$ изобразить на плоскости R^2 линии уровня

$$L_\alpha(f) = \{(x, y): x^2 + 3y^2 - 4x = \alpha;\ \alpha \in R\}$$

Выделить линию уровня, проходящую через точку $P_0(1;1)$. Найти градиент поля в этой точке. Проверить ортогональность grad $f(P_0)$ и касательной прямой к выделенной линии уровня в точке P_0.

Решение

$$x^2 + 3y^2 - 4x = \alpha$$
$$x^2 - 4x + 3y^2 = \alpha$$
$$x^2 - 4x + 4 + 3y^2 = \alpha + 4$$
$$(x-2)^2 + 3y^2 = \alpha + 4$$

Так как $(x-2)^2 + 3y^2 \ge 0$, то $\alpha + 4 \ge 0$, т.е. $\alpha \ge -4$.

Если $\alpha = -4$, то получим уравнение $(x-2)^2 + 3y^2 = 0$, которому удовлетворяет лишь одна точка $M(2;0)$.

Если $\alpha > -4$, то $\alpha + 4 > 0$. В этом случае получим:

$$\frac{(x-2)^2}{\alpha+4} + \frac{3y^2}{\alpha+4} = 1;\ \frac{(x-2)^2}{\alpha+4} + \frac{y^2}{\frac{\alpha+4}{3}} = 1.$$

Полученное уравнение определяет эллипс с полуосями $a = \sqrt{\alpha+4}$ и $b = \sqrt{\frac{\alpha+4}{3}}$. Центр эллипса лежит в точке $M(2;0)$, а оси лежат на прямых $x = 2$ и $y = 0$ (ось Ox).

Искомая линия уровня проходит через точку $P_0(1;1)$, поэтому получим:

$$(1-2)^2 + 3\cdot 1^2 = \alpha + 4;\ \alpha + 4 = 4;\ \alpha = 0.$$

При $\alpha = 0$ получим такую линию уровня: $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1$. Это эллипс с полуосями $a = 2$ и $b = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Найдём уравнение касательной к данной линии в точке P_0. Дифференцируя обе части полученного уравнения, имеем:

$$\frac{2(x-2)}{4} + \frac{2y}{\frac{4}{3}} \cdot y' = 0;\ x - 2 + 3y \cdot y' = 0;\ y' = \frac{2-x}{3y};\ y'\big|_{P_0} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Уравнение касательной: $y - 1 = \frac{1}{3}(x-1);\ \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1}$.

Направляющий вектор касательной: $\bar{s}(3;1)$.

Найдём градиент в точке P_0.

$$z'_x = 2x - 4;\ z'_x(P_0) = 2 - 4 = -2.$$
$$z'_y = 6y;\ z'_y(P_0) = 6.$$

$$\text{grad } f(P_0) = -2\bar{i} + 6\bar{j}$$

$$\bar{s} \cdot \text{grad } f(P_0) = 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 6 = -6 + 6 = 0$$

Так как $\bar{s} \cdot \text{grad } f(P_0) = 0$, то $\bar{s} \perp \text{grad } f(P_0)$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.